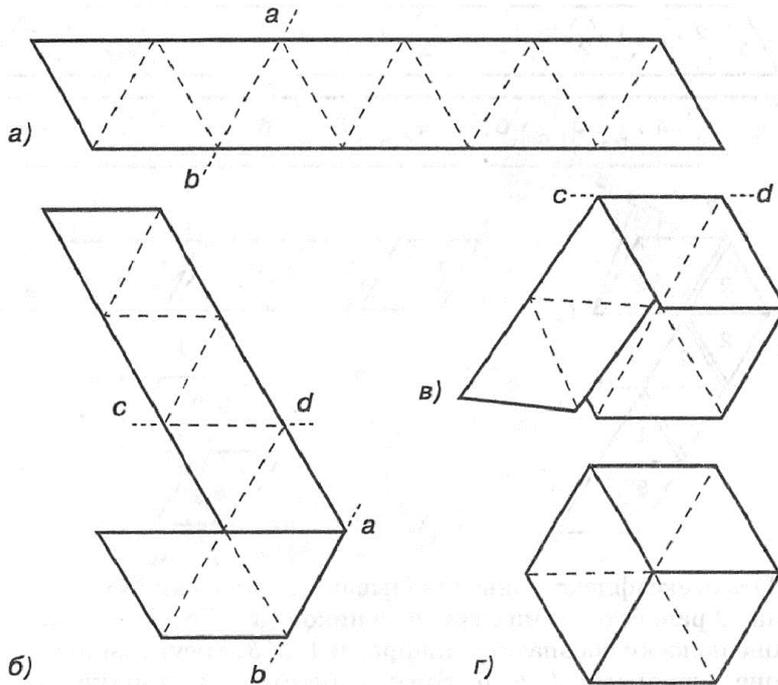


## ЧТО ТАКОЕ ФЛЕКСАГОНЫ



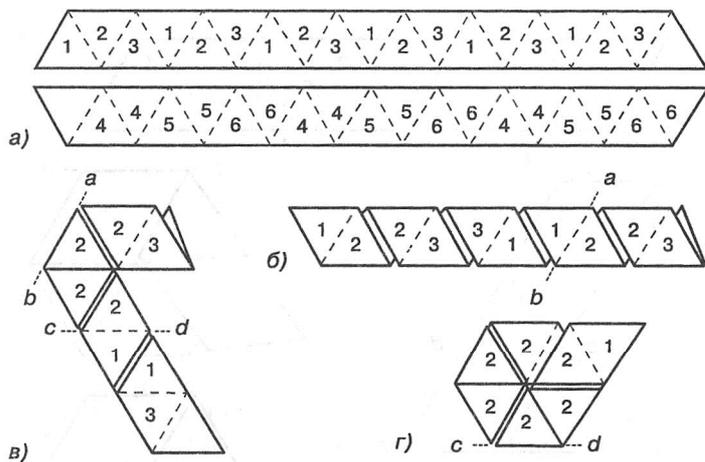
**Рис. 1** Тригексафлексатон складывают из полоски бумаги, предварительно размеченной на 10 равносторонних треугольников (*a*). Полоску перегибают по линии *ab* и переворачивают (*b*). Перегнув полоску еще раз по линии *cd*, расположим ее концы так, чтобы предпоследний треугольник оказался наложенным на первый (*в*). Последний треугольник нужно подогнуть вниз и приклеить к оборотной стороне первого треугольника (*г*). Как сгибать трифлексатон, показано на рис. 3. Развертку трифлексатона нужно перерисовать и вырезать из полоски достаточно плотной бумаги шириной около 3–4 см.

Флексатоны — это многоугольники, сложенные из полосок бумаги прямоугольной или более сложной, изогнутой формы, которые обладают удивительным свойством: при перегибании флексатонов их наружные поверхности прячутся внутрь, а ранее скрытые неожиданно выходят наружу. Если бы не одно случайное обстоятельство — различие в формате английских и американских блокнотов. — флексатоны, возможно, не были бы открыты и по сей день и многие выдающиеся математики лишились бы удовольствия изучать их замысловатую структуру.

Это произошло в конце 1939 года. Как-то раз Артур Х. Стоун, двадцатитрехлетний аспирант из Англии, изучавший математику в Принстоне, обрезал листы американского блокнота, чтобы подогнать их под привычный формат. Желая немного развлечься, Стоун принялся складывать из отрезанных полосок бумаги различные фигуры. Одна из сделанных им фигур оказалась особенно интересной. Перегнув полоску бумаги в трех местах и соединив концы, он получил правильный шестиугольник (рис. 1). Взяв этот шестиугольник за два смежных треугольника, Стоун подогнул противоположный угол вниз так, что его вершина совпала с центром фигуры. При этом Стоун обратил внимание на то, что, когда шестиугольник раскрывался словно бутон, видимой становилась совсем другая поверхность. Если бы обе стороны исходного шестиугольника были разного цвета, то после перегибания видимая поверхность изменила бы свою окраску. Так был открыт самый первый флексатон с тремя поверхностями. Поразмыслив над ним ночь, Стоун наутро убедился в правильности своих чисто умозрительных заключений: оказалось, можно построить и более сложный шестиугольник с шестью поверхностями вместо трех. При этом Стоуну удалось найти настолько интересную конфигурацию, что он решил показать свои бумажные модели друзьям по университету. Вскоре «флексатоны» в изобилии стали появляться на столе во время завтраков и обедов, когда вся компания собиралась вместе. Для проникновения в тайны «флексологии» был организован «Флексагонный комитет». Кроме Стоуна, в него вошли аспирант-математик Бриан Таккермен, аспирант-физик Ричард Фейнман и молодой преподаватель математики Джон У. Тьюки.

Постоянные модели были названы гексафлексатонами: «гекса» — из-за шестиугольной формы, «флексатонами» — из-за их способности складываться. Первый построенный Стоуном флексатон был назван тригексафлексатон, так как у него были три поверхности. Вторая не менее изящная модель Стоуна получила название гексагексафлексатона (первое «гекса» — шесть — также означает число поверхностей этой модели).

Чтобы сложить гексагексафлексатон, берут полоску бумаги (великолепным материалом для изготовления гексагексафлексатонов



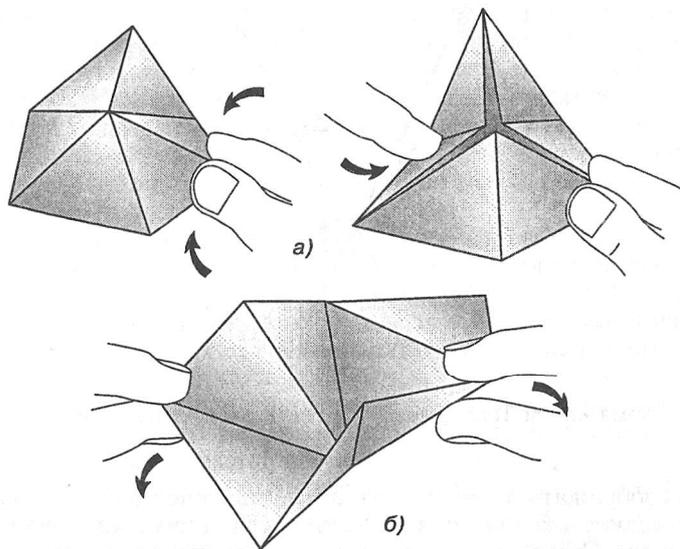
**Рис. 2** Гексагексафлексагоны складывают из полоски бумаги, разделенной на 19 равносторонних треугольников (а). Треугольники на одной стороне полоски обозначены цифрами 1, 2, 3; треугольники на другой стороне — цифрами 4, 5, 6. Вместо цифр треугольники можно раскрасить в различные цвета (каждой цифре должен соответствовать только один цвет) или нарисовать на них какую-нибудь геометрическую фигуру. Как складывать полоску, ясно из рисунка. Перегибая гексагексафлексагон, можно увидеть все шесть его разворотов.

может служить лента для кассовых аппаратов), разделенную на 19 равносторонних треугольников. В треугольнике с одной стороны нужно вписать в указанном на рис. 2 порядке цифры 1, 2, 3. Девятнадцатый (последний) треугольник остается незаполненным. Треугольники на обратной стороне следует в соответствии со схемой на рис. 2 пронумеровать цифрами 4, 5, 6. После этого полоску складывают так, чтобы треугольники на ее обратной стороне, имеющие одинаковые цифры, оказались наложенными друг на друга — 4 на 4, 5 на 5, 6 на 6. В результате у нас получится заготовка гексагексафлексагона, показанная на рис. 2, б. Перегнув ее по линиям  $ab$  и  $cd$  (рис. 2, в), получим шестиугольник. Остается лишь подвернуть вниз торчащий вправо пустой треугольник и приклеить его к пустому треугольнику на нижней стороне полоски. Прodelать все эти операции намного легче, чем описать.

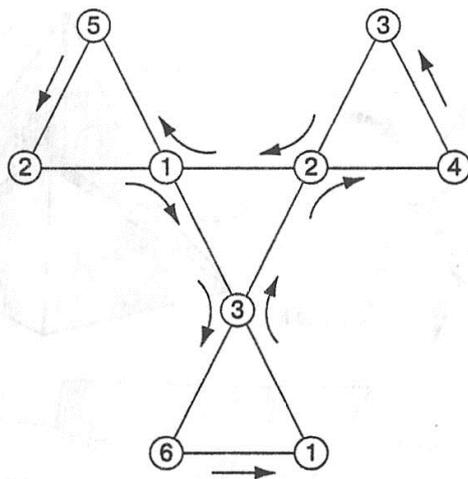
Если все сделано верно, то во всех треугольниках на видимой стороне шестиугольника должна стоять цифра 1, а во всех треугольниках на обратной стороне — цифра 2. В таком виде тригексафлексагон готов к перегибаниям. Взявшись за два смежных треугольника (рис. 3), согнем шестиугольник по общей стороне этих треугольников и подогнем противоположный угол флексагона. При этом откроются треугольники с цифрами 3 или 5. Перегибая флексагон наугад, вы без труда обнаружите и остальные поверхности. Однако поверхности с цифрами 4, 5 и 6 найти несколько труднее, чем поверхности с цифрами 1, 2 к 3. Иногда вы будете блуждать по замкнутому кругу: сколько бы вы ни бились, перед вами будут открываться лишь одни и те же уже успевшие надоесть вам поверхности.

Таккерман довольно быстро нашел простейший способ выявления всех поверхностей любого флексагона: держа флексагон за какой-нибудь угол, следует открывать фигуру до тех пор, пока она «открывается», а затем переходить к следующему углу. Этот метод, известный как «путь Таккермана», позволяет увидеть все шесть разворотов гексагексафлексагонов за один цикл из 12 перегибаний. Поверхности с цифрами 1, 2 к 3 будут появляться в три раза чаще, чем поверхности с цифрами 4, 5 и 6. Путь Таккермана удобно изображать в виде схемы, представленной на рис. 4. Стрелки указывают, в каком порядке становятся видимыми поверхности флексагона. Схемы такого типа пригодны для исследования любой разновидности флексагонов. Если модель перевернуть, то путь Таккермана будет изображаться той же схемой, но направление ее обхода будет противоположным.

Комитет обнаружил, что, удлиняя цепочку треугольников, можно делать флексагоны с 9, 12, 15 и даже большим числом поверхностей. Таккерман ухитрился даже изготовить действующую модель флексагона с 48 поверхностями! Он также обнаружил, что из зигзагообразной полоски бумаги (то есть из полоски с зубчатым, а не прямым краем) можно сложить тетрагексафлексагон (с четырьмя поверхностями) и пентагексафлексагон (с пятью поверхностями). Существует три различных гексагексафлексагона: первый складывают из прямой полоски бумаги, второй — из полоски, предварительно сложенной в виде шестиугольника, и третий — из полоски, форма которой напоминает лист клевера. Разнообразием декагексафлексагона (с девятью поверхностями) намного больше — их 82. Заготовки для всех 82 типов декагексафлексагонов имеют вид бумажных полос, сложенных самым причудливым образом. В принципе можно построить флексагон с любым числом поверхностей, но если поверхностей больше 10, то число разновидностей флексагонов катастрофически возрастает. Кстати, все флексагоны с четным числом поверхностей делаются из двусторонних полос, а флексагоны с нечетным числом поверхностей, подобно листу Мёбиуса, имеют лишь одну сторону.



**Рис. 3** Чтобы «открыть» тригексафлексгон, его нужно одной рукой взять за два соседних треугольника, примыкающих к какой-нибудь вершине шестиугольника (а), а другой рукой потянуть за свободный край двух противоположных треугольников (б). Если флексгон не открывается, нужно попробовать ухватить его за два других треугольника. При открывании шестиугольник выворачивается наизнанку, и наружу выходит поверхность, которая ранее скрывалась внутри.



**Рис. 4** Схема «пути Таккермана» на гексагексафлексгоне.

Полная математическая теория флексгонов была разработана в 1940 году Тьюки и Фейнманом. Помимо всего прочего, теория указывает точный способ построения флексгона с любым числом сторон, причем именно той разновидности, которая требуется. В своем полном виде эта теория так никогда и не была опубликована, хотя отдельные ее части впоследствии были открыты заново другими математиками. Среди энтузиастов «флексологии» следует назвать отца Таккермана, известного физика Луи Таккермана. Таккерман-старший внес существенный вклад в теорию флексгонов, разработав простой, но эффективный способ изображать «путь Таккермана» в виде дерева.

Нападение японцев на Пирл-Харбор приостановило работу «Флексгонного комитета», а война вскоре разбросала всех четырех его учредителей в разные стороны. Стоун стал читать курс математики в Манчестерском университете, Фейнман, известный физик-теоретик, работал в Калифорнийском технологическом институте, Тьюки занял пост профессора математики в Принстоне, его блестящие работы по топологии и теории вероятностей снискали ему мировую известность. Таккерман — видный математик, он участвовал в разработке проекта быстрогодействующего компьютера, который был создан в Институте высших исследований.

Комитет все надеялся как-нибудь собраться и написать одну-две статьи с подробным изложением теории флексгонов. Но этого не случилось, а потому ничто не мешает нам, играя с самодельными флексгонами, попытаться вывести собственную теорию.

Прежде чем приступать к изготовлению флексагона, полезно несколько раз перегнуть в обе стороны его развертку по всем линиям сгиба. Это намного облегчает последующие манипуляции с флексагоном. Иногда читатели делали более долговечные модели, вырезав треугольники из картона или металла и соединив их липкой лентой или же наклеив на длинную полоску ткани. Между треугольниками оставались небольшие зазоры, что позволяло легко сгибать флексагоны. Таккерман-старший обычно пользовался стальной пластинкой таких размеров, что, обернув вокруг нее бумажную ленту, можно быстро получать сложенную особым образом полоску, показанную на рис. 2, а. Это давало существенный выигрыш во времени при изготовлении флексагонов из линейной цепочки треугольников.

Из писем читателей я узнал множество способов раскраски флексагонов, которые приводят к Интересным головоломкам и самым неожиданным зрительным эффектам. Так, каждая поверхность гексагексафлексагона может появляться по крайней мере в двух различных видах в зависимости от того, как повернуты относительно друг друга образующие ее треугольники.

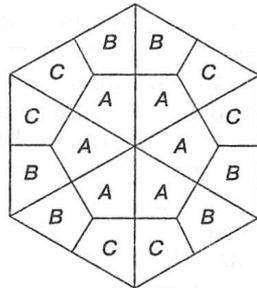


Рис. 5

Например, если каждую поверхность разделить на части так, как показано на рис. 5, и выкрасить области А, В и С в различные цвета, то в центре видимой поверхности могут появиться и области А (именно этот случай и показан на рис. 5), и области В, и области С. На рис. 6 изображен геометрический узор, который, будучи нарисован на одном развороте флексагона, появляется на двух других разворотах, каждый раз принимая иной вид.

Вращая треугольники, из которых составлен правильный шестиугольник, мы получаем 18 различных разновидностей шестиугольников. Если гексагексафлексагон сделан из прямой полоски бумаги, то три из этих 18 шестиугольников никогда не встретятся

нам, как бы мы ни складывали наш флексагон. Это навело одного из наших читателей на мысль наклеить на каждый разворот гексагексафлексагона части трех различных картинок. Перегибая определенным образом флексагон, мы будем видеть по очереди в центре открывшейся поверхности одну из картинок, а на периферии — фрагменты двух других изображений. К трем «скрытым» шестиугольникам, которые никогда полностью не появляются на видимой стороне флексагона, он приклеил разрезанные на части портреты трех очаровательных девушек, которых зритель, несмотря на все свои старания, никак не может рассмотреть во всех подробностях. Свою игрушку читатель назвал гексагексафрастрагоном\*. Другой читатель добился аналогичных результатов, склеив два смежных треугольника. Из-за этого исчез целый шестиугольник, и жертвы невинного розыгрыша тщетно пытались найти недостающий разворот флексагона. Неудача казалась тем более непонятной, что, заглянув внутрь флексагона, они собственными глазами видели части таинственно исчезнувшей поверхности!

Утверждение о том, что шестиугольники, возникающие при развороте гексагексафлексагонов, могут быть только 15 различных типов, необходимо несколько уточнить. Несимметричная раскраска поверхностей гексагексафлексагонов позволяет обнаружить любопытный факт: три из 15 допустимых шестиугольников имеют свои зеркально-симметричные пары. Перенумеровав внутренние углы каждого из допустимых шестиугольников по часовой стрелке цифрами от 1 до 6, мы обнаружим, что при складывании флексагонов три шестиугольника переходят в зеркально-симметричные шестиугольники, у которых углы перенумерованы теми же цифрами, но расположенными в обратном порядке. Если принять во внимание эту асимметрию, то можно сказать, что шесть поверхностей гексагексафлексагона могут порождать 18 различных шестиугольников.

Для тех, кто захочет сам изготовить флексагоны других типов, отличные от рассмотренных, мы приводим краткий обзор флексагонов низших порядков.

1. Унагексафлексагон. Полоску из трех треугольников разглаживают и концы ее соединяют так, чтобы получился лист Мёбиуса с треугольным краем (более изящная модель листа Мёбиуса с треугольным краем рассматривается в главе 7). Поскольку лист Мёбиуса имеет только одну сторону и состоит из шести треугольников, его можно назвать унагексафлексагоном, хотя, разумеется, у него нет шести сторон и он не складывается.
2. Дуогексафлексагон представляет собой просто шестиугольник, вырезанный из бумаги. У него две стороны, но он не складывается.
3. Тригексафлексагон. Существует только одна разновидность этого флексагона, именно она и была уже описана нами.
4. Тетрагексафлексагон также существует лишь в единственном варианте. Его складывают из пилообразной полоски, изображенной на рис. 7, а.
5. Пентагексафлексагон. Единственную разновидность этого флексагона складывают из полоски, показанной на рис. 7, б.
6. Гексагексафлексагон. Существует три различных типа этих флексагонов, каждый из них обладает неповторимыми свойствами. Мы дали описание лишь одного типа. Два остальных можно сделать из полосок, форма которых показана на рис. 7, в.

7. Гептагексафлексатон. Его складывают из трех полосок бумаги, изображенных на рис. 7, г. Первую полоску можно сложить двумя различными способами, поэтому общее число возможных форм



Рис. 6

гептагексафлексатонов равно 4. Третью форму этих флексатонов конструируют из полоски бумаги, имеющей вид восьмерки с пере-крывающимися частями. Это первая из фигур, которые Луи Таккерман назвал «флексатонными улицами». Поверхности этой фигуры можно перенумеровать так, что на «пути Таккермана» они будут встречаться «по порядку номеров», как дома на улице.

Существует 12 различных типов октагексафлексатонов, 27 типов эннагексафлексатонов и 82 типа декагексафлексатонов. Точное число флексатонов каждого порядка определяется неоднозначно и зависит от того, что следует понимать под «различными» флексатонами. Например, все флексатоны имеют асимметричную структуру и делятся на правые и левые, но зеркально-симметричные формы флексатонов вряд ли следует считать самостоятельными. Более подробно о числе неэквивалентных флексатонов каждого порядка можно прочитать в статье Оукли и Визнера

Порядки гексафлексатонов, которые можно сложить из прямых полосок, поделенных на равносторонние треугольники, всегда кратны трем. Особенно легко построить одну разновидность гексафлексатонов с двенадцатью поверхностями. Для этого берут прямую полоску бумаги вдвое длиннее той, из которой мы складывали гексагексафлексатон, и «скручивают» ее так, как показано на рис. 2, б. При этом длина полоски сократится вдвое и станет равной длине гексагексафлексатонной полоски. Затем скрученную полоску нужно сложить точно таким образом, как если бы вы складывали гексагексафлексатон. В результате получится додекагексафлексатон.

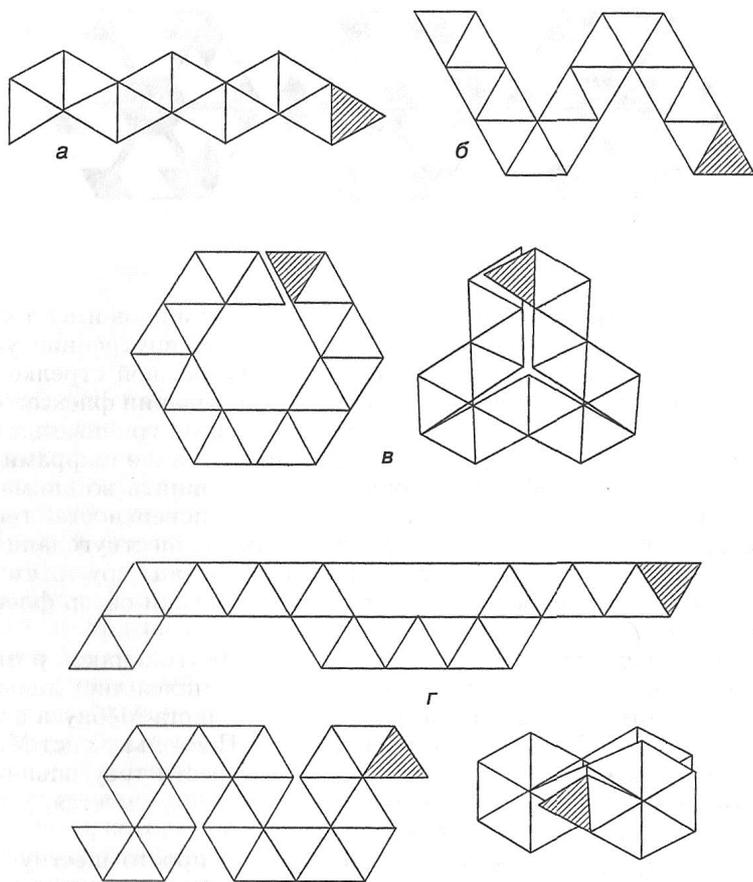
Экспериментируя с флексатонами высоких порядков, полезно иметь в виду удобное правило: число слоев бумаги в двух соседних треугольных секциях всегда равно числу поверхностей данного флексатона. Интересно также отметить, что если каждую поверхность флексатона пометить каким-нибудь числом или символом и этот символ поставить на всех треугольниках, принадлежащих данной поверхности, то чередование символов на развернутой полоске будет обладать трехкратной периодичностью.

Например, на лицевой и обратной сторонах развертки гексагексафлексатона, изображенного на рис. 2, цифры будут располагаться в такой последовательности:

123123 123123 123123

445566 445566 445566

Аналогичное разделение символов на три группы характерно для всех гексагексафлексатонов, но у флексатонов нечетного порядка символы в одной из трех групп расположены в обратном порядке по сравнению с двумя остальными группами.



**Рис. 7** Зигзагообразные полоски бумаги для складывания гексафлексонов. Заштрихованные треугольники служат клапанами для склеивания.