Тема № 29 «Геометрическая прогрессия»

Последовательность чисел, каждый следующий член которой равен предыдущему, умноженному на одно и то же число, называется **геометрической прогрессией.** Это число называется **знаменателем геометрической прогрессии** и обозначается буквой q.

Рекуррентная формула n-го члена: $b_{n+1} = b_n q$

Формула n-го члена: $b_n = b_1 q^{n-1}$

Сумма первых n членов 1-я формула

Сумма первых n членов 2-я формула

Сумма бесконечной геометрической прогрессии ($|q|<1$)

Характеристическое свойство $\mathbf{b_k = \sqrt{b_{k-1} b_{k+1}}}$

Если $b_1 > 0$ и или $b_1 < 0$ и $0 < q < 1$, то прогрессия является возрастающей.

Если $b_1 > 0$ и $0 < q < 1$ или $b_1 < 0$ и $q > 1$, то прогрессия является убывающей

Если $q < 0$, то геометрическая прогрессия является знакопеременной: ее члены с нечетными номерами имеют тот же знак, что и ее первый член, а члены с четными номерами – противоположный ему знак. Знакопеременная геометрическая прогрессия не является монотонной.

Пример 1. Найдите разность восьмого и шестого членов геометрической прогрессии, если их сумма равна 16, а произведение второго и двенадцатого членов этой прогрессии равно 28.

Решение: $b_n = b_1 q^{n-1}$

Составим систему уравнений по условию задачи:

$\begin{cases} b_2 \cdot b_{12} = 28, \\ b_8 + b_6 = 16, \end{cases}$ $\begin{cases} b_2 \cdot b_{12} = b_8 \cdot b_6 = b_1^2 \cdot q^{12} = 28, \\ b_8 + b_6 = 16, \end{cases}$ $\begin{cases} b_8 \cdot b_6 = 28, \\ b_8 + b_6 = 16, \end{cases}$ $\begin{cases} b_8 \cdot b_6 = 28, \\ b_8 = 16 - b_6, \end{cases}$

$(16 – b_6)b_6 = 28$, $b_6^2 – 16b_6 + 28 = 0$, $b_6 = 14$ или $b_6 = 2$. Тогда $b_8 = 2$ или $b_8 = 14$.

$b_8 – b_6 = –12$ или $b_8 – b_6 = 12$

Ответ –12, 12.

Пример 2. Найдите x, если известно, что числа x – 2, $\sqrt{(6x)}$, x + 5 являются последовательными членами геометрической прогрессии (в указанном порядке).

Решение: Воспользуемся характеристическим свойством прогрессии:

$$b_k = \sqrt{b_{k-1} b_{k+1}}$$

$(x-2)(x+5) = 6x$, $x^2 - 3x - 10 = 0$, $x = 5$ или $x = -2$. По условию $x > 0$.

Ответ 5.

Пример 3. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если разность ее тридцатого и двадцать седьмого членов в 30 раз больше суммы двадцать шестого, двадцать седьмого и двадцать восьмого членов.

Решение: Используя формулу общего члена прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$, запишем условие задачи:

$b_{30} - b_{27} = b_1q^{29} - b_1q^{26} = b_1q^{26}(q^3 - 1)$.

$b_{26} + b_{27} + b_{28} = b_1q^{25} + b_1q^{26} + b_1q^{27} = b_1q^{25}(1 + q + q^2)$.

Согласно условию составим уравнение: $b_1q^{26}(q^3 - 1) = 30\, b_1q^{25}(1 + q + q^2)\ |: b_1q^{25}$

$q(q-1)(1 + q + q^2) = 30(1 + q + q^2)|: (1 + q + q^2)$, $q^2 - q - 30 = 0$, $q = 6$ или $q = -5$.

Ответ 6, –5.

Пример 4. Если тринадцатый член геометрической прогрессии увеличить в 12 раз и сложить с пятнадцатым членом, то получится число, в 7 раз большее ее четырнадцатого члена. Найдите знаменатель прогрессии.

Решение: Согласно условию составим уравнение: $12b_{13} + b_{15} = 7b_{14}$.

Используя формулу общего члена прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$, получим уравнение:

$12b_1q^{12} + b_1q^{14} = 7b_1q^{13}|: b_1q^{12}$, $q^2 - 7q + 12 = 0$, $q = 4$ или $q = 3$.

Ответ 4,3.

Пример 5. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, у которой отношение седьмого члена к шестому в 7 раз меньше отношения шестого члена к четвертому.

Решение: Подставим в условие задачи: $\frac{b_6}{b_4} = 7 \cdot \frac{b_7}{b_6}$ формулу общего члена прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$, получим $\frac{b_1q^5}{b_1q^3} = 7 \cdot \frac{b_1q^6}{b_1q^5}$, откуда $q^2 = 7q$, $q = 7$.

Ответ 7.

Пример 6. Существует ли геометрическая прогрессия, в которой третий член равен 9, а девятый член равен —3?

Решение: Пусть такая прогрессия существует, тогда согласно условию:

$b_3 = b_1q^2 = 9$,

$b_9 = b_1q^8 = -3$,

Разделим второе уравнение на первое, получим: $q^6 = -1/3$.

Полученное равенство невозможно ни при каком q, поскольку выражение q^6 принимает только положительные значения.
Значит, предположение неверно, такая прогрессия не существует.
Ответ не существует

Пример 7. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если ее пятьдесят первый член в 36 раз меньше ее пятьдесят третьего члена.

Решение: Из условия задачи находим: : $\frac{b_{53}}{b_{51}} = 36$
Используя формулу общего члена прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$, получим:
$\frac{b_1 q^{52}}{b_1 q^{50}} = 36$, $q^2 = 36$, $q = 6$ или $q = -6$.
Ответ 6, – 6.

Пример 8. Первый член бесконечной геометрической прогрессии на 8 больше второго, а сумма ее членов равна 18. Найти третий член прогрессии.
Решение: Выразим первый член прогрессии, используя формулу общего члена:

$b_1 = b_2 + 8$, $b_1 = b_1 q + 8$, $b_1(1 - q) = 8$, .
Подставим полученное значение для первого члена в формулу суммы бесконечной

геометрической прогрессии:

, $18(1 - q) = b_1$, $18(1 - q) = \frac{8}{1 - q}$, $(1 - q)^2 = 8/18 = 4/9$,
$1 - q = 2/3$ или $1 - q = -2/3$, откуда $q = 1/3$ или $q = 1\,2/3 > 1$, не подходит, т.к. $|q| < 1$.

Тогда .

Ответ 4/3.

Пример 9. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 1,5, а сумма квадратов ее членов равна 1,125. Найти первый член и знаменатель прогрессии.
Решение: Если вынесем общий множитель в выражении для суммы квадратов членов прогрессии, то можно заметить, что в скобках получим новую бесконечную геометрическую прогрессию с первым членом, равным 1 и знаменателем q^2:
$S = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 +\ldots = b_1^2 + b_1^2q^2 + b_1^2q^4 +\ldots = b_1^2(1 + q^2 + q^4 +\ldots) = 1{,}125$, поэтому

Запишем теперь оба условия задачи в виде системы:

$$\begin{cases}\dfrac{b_1}{1-q}=\dfrac{3}{2},\\ \dfrac{b_1^2}{1-q^2}=\dfrac{9}{8},\end{cases}$$ Разделим 2-е уравнение на 1-е: $$\begin{cases}\dfrac{b_1}{1+q}=\dfrac{3}{4},\\ \dfrac{b_1}{1-q}=\dfrac{3}{2},\end{cases}\quad \begin{cases}b_1=\dfrac{3}{4(1+q)},\\ b_1=\dfrac{3}{2(1-q)}.\end{cases}$$

Приравняем правые части полученных уравнений и найдем q:

Тогда $b_1=\dfrac{3}{4}(1+q)=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{3}=1.$
Ответ 1; 1/3.

Пример 10. Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 64/7. Найти сумму квадратов членов этой прогрессии.
Решение: Если вынесем общий множитель в выражении для суммы кубов членов прогрессии, то можно заметить, что в скобках получим новую бесконечную геометрическую прогрессию с первым членом, равным 1 и знаменателем q^3:
$S = b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 +\ldots = b_1^3 + b_1^3q^3 + b_1^3q^6 +\ldots = b_1^3(1 + q^3 + q^6 +\ldots) = 64/7$, поэтому

Запишем теперь оба условия задачи в виде системы:

$$\begin{cases}\dfrac{b_1}{1-q}=4,\\ \dfrac{b_1^3}{1-q^3}=\dfrac{64}{7}.\end{cases}$$ Разделим 2-е уравнение на 1-е: $$\begin{cases}\dfrac{b_1^2}{1+q+q^2}=\dfrac{16}{7},\\ \dfrac{b_1}{1-q}=4,\end{cases}$$

Если возведем второе уравнение системы в квадрат, то сможем приравнять правые части полученных уравнений и найти q:

$$\frac{16}{7}(1+q+q^2)=\left(4(1-q)\right)^2.$$

$1 + q + q^2 = 7(1 – 2q + q^2)$, $1 + q + q^2 = 7 – 14q + 7q^2$, $6q^2 – 15q + 6 = 0|:3$,
$2q^2 – 5q + 2 = 0$, $q = 0{,}5$ или $q = 2 > 1$, поэтому корень исключаем.

Тогда $b_1 = 4(1 - 0,5) = 2$.
А искомая сумма $S = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots = b_1^2 + b_1^2 q^2 + b_1^2 q^4 + \ldots = b_1^2(1 + q^2 + q^4 + \ldots)$
или

Ответ 16/3.

Пример 11. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 6. Найти сумму первых пяти ее членов, если первый член равен 4.

1) $\frac{396}{81}$ 2) $\frac{484}{81}$ 3) 6 4) $\frac{533}{27}$

Решение. Пусть b_1 – первый член прогрессии, S – ее сумма. Тогда

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \quad 6 = \frac{4}{1-q}, \quad 6 - 6q = 4, \quad q = \frac{1}{3}.$$

$$S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{q-1} = \frac{4\left(\frac{1}{243} - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{4 \cdot 242 \cdot 3}{243 \cdot 2} = \frac{484}{81}.$$

Ответ: 2.

Пример 12. У гражданина Петрова 1 августа 2000 года родился сын. По этому случаю он открыл в некотором банке вклад в 1000 рублей. Каждый следующий год 1 августа он пополнял вклад на 1000 рублей. По условиям договора банк ежегодно 31 июля начислял 20 % на сумму вклада. Через 6 лет у гражданина Петрова родилась дочь, и он открыл в другом банке ещё один вклад, уже в 2200 рублей, и каждый следующий год пополнял этот вклад на 2200 рублей, а банк ежегодно начислял 44% на сумму вклада. Через сколько лет после рождения сына суммы на каждом из двух вкладов сравняются, если деньги из вкладов не изымаются?

Решение: Через n лет в первом банке будет сумма

$1000 + 1000 \cdot 1,2 + \ldots + 1000 \cdot 1,2^n = 1000 \cdot \frac{1,2^{n+1} - 1}{1,2 - 1} = 5000(1,2^{n+1} - 1)$ (руб)

Через n – 6 лет во втором банке окажется

$2200 + 2200 \cdot 1,44 + \ldots + 2200 \cdot 1,44^{n-6} = 2200 \cdot \frac{1,44^{n-5} - 1}{1,44 - 1} = 5000(1,44^{n-5} - 1)$ (руб)

Приравняем эти суммы и решим полученное уравнение:

$$5000\left(1,2^{n+1} - 1\right) = 5000(1,44^{n-5} - 1)$$
$$1,2^{n+1} = 1,44^{n-5}$$
$$1,2^{n+1} = 1,2^{2(n-5)}$$

n + 1 = 2n – 10, n = 11.

Ответ 11.