

Тема № 27 «Задачи на сплавы и смеси»

В данном разделе рассматриваются задачи, в которых речь идет о смесях (растворах) некоторого вещества в другом веществе и об изменении концентрации этого вещества после каких-либо манипуляций. При этом водные растворы, смеси или сплавы играют сходные роли и позволяют лишь несколько разнообразить сюжеты задач без изменения математического содержания.

Ключевой при решении таких задач является идея отслеживания изменений, происходящих с «чистым» веществом (далее кавычки будем опускать).

Пример 1. Дано: m_1 кг – масса вещества А, в котором присутствует вещество В с концентрацией $p_1\%$; m_2 кг – масса вещества А, в котором присутствует вещество В с концентрацией $p_2\%$. Чему равна процентная концентрация смеси этих масс?

Решение: $m_1 p_1 + m_2 p_2 = p(m_1 + m_2)$, откуда
$$p = \frac{m_1 p_1 + m_2 p_2}{m_1 + m_2}.$$

Пример 2. Даны два куска с различным содержанием олова. Первый, массой 300 г, содержит 20% олова. Второй, массой 200 г, содержит 40% олова. Сколько процентов олова будет содержать сплав, полученный из этих кусков?

Решение: $m_1 p_1 + m_2 p_2 = p(m_1 + m_2)$

$$300 \cdot 20 + 200 \cdot 40 = p(300 + 200), \text{ откуда } p = 14000/500 = 28\%.$$

Ответ 28.

Пример 3. В сосуд, содержащий 5 литров 12%-го водного раствора кислоты, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Решение: Учтем, что вода имеет концентрацию кислоты 0%.

$$m_1 p_1 + m_2 p_2 = p(m_1 + m_2)$$

$$5 \cdot 12 + 7 \cdot 0 = p(5 + 7); \quad p = 5 (\%)$$

Ответ 5.

Пример 4. Имеется чай двух сортов – по 80 и 120 рублей за 1 кг. Смешали 300г первого и 200г второго сорта. Определить цену за 1 кг полученной смеси.

Решение: $300 \cdot 80 + 200 \cdot 120 = p(300 + 200)$, откуда $p = 48000/500 = 96$ (руб/кг)

Ответ 96.

Пример 5. Дано: кусок вещества А, в котором присутствует вещество В с концентрацией $p_1\%$; кусок вещества А, в котором присутствует вещество В с концентрацией $p_2\%$. По сколько грамм от каждого куска надо взять, чтобы получить m грамм смеси, содержащей $p\%$ вещества В?

Решение: $m_1 p_1 + (m - m_1)p_2 = mp$; $m_1 p_1 + mp_2 - m_1 p_2 = mp$; $m_1 (p_1 - p_2) = mp - mp_2$,

$$m_1 (p_1 - p_2) = m(p - p_2), \text{ откуда } m_1 = \frac{m(p - p_2)}{p_1 - p_2}.$$

Пример 6. Торговец продает орехи двух сортов: 1-й – по 90 центов, 2-й – по 60 центов за 1 кг. Он хочет получить 50 кг смеси по 72 цента за кг. Сколько для этого потребуется взять орехов каждого сорта?

Решение: $m_1 p_1 + m_2 p_2 = p(m_1 + m_2)$

$$m_1 \cdot 90 + (50 - m_1) \cdot 60 = 50 \cdot 72, \text{ откуда находим } m_1 = 20 \text{ (кг)}, m_2 = 30 \text{ (кг)}.$$

Ответ 20, 30.

Пример 7. Сколько фунтов меди надо сплавить с 75 фунтами серебра 72-й пробы, чтобы получить серебро 64-й пробы.

Решение: Учтем, что медь имеет концентрацию серебра 0%.

$$m_1 p_1 + m_2 p_2 = p(m_1 + m_2)$$

$$75 \cdot 72 + m \cdot 0 = 64(75 + m), m = 9,375 \text{ (фунтов)}$$

Ответ 9,375.

Пример 8. Дано: кусок вещества А, в котором присутствует вещество В с концентрацией $p_1\%$; кусок вещества А, в котором присутствует вещество В с концентрацией $p_2\%$. В каком отношении (по массе) надо сплавить части этих кусков, чтобы получить сплав, содержащий $p\%$ вещества В?

Решение: $m_1 p_1 + m_2 p_2 = p(m_1 + m_2)$. Подставим $m_1 = km_2$

$$km_2 p_1 + m_2 p_2 = p(km_2 + m_2) \quad | : m_2;$$

$$kp_1 + p_2 = p(k + 1); \quad kp_1 + p_2 = pk + p; \quad kp_1 - pk = p - p_2; \quad k(p_1 - p) = p - p_2;$$

$$k = (p - p_2) / (p_1 - p).$$

Ответ $k = (p - p_2) / (p_1 - p)$.

По схеме примера 8 решаются и задачи вида:

Дано ρ_1 и ρ_2 – плотности двух веществ, ρ – плотность их смеси. В каком отношении (по объему) смешаны эти вещества?

Пусть V_1 и V_2 – объемы этих веществ. Масса смешиваемых веществ равна массе смеси, т.е. выполняется равенство, аналогичное предыдущей задаче:

$$V_1 \rho_1 + V_2 \rho_2 = \rho(V_1 + V_2). \text{ Подставим } V_1 = kV_2 \Rightarrow k = (\rho - \rho_2) / (\rho_1 - \rho).$$

Пример 9. Торговец продает вино двух сортов: по 10 и по 6 гривен за ведро. Какие части этих вин ему надо взять, чтобы получить вино ценою в 7 гривен за ведро?

Решение: $10m_1 + 6m_2 = 7(m_1 + m_2)$. Подставим $m_1 = km_2$

$$10 km_2 + 6m_2 = 7(km_2 + m_2) \mid : m_2; \quad 10k + 6 = 7(k + 1); \quad k = 1/3;$$

$3m_1 = m_2$. Это значит из четырех частей вина одна часть по 6 гривен, а три части – по 10 гривен.

Ответ $\frac{1}{4}$ ведра по 6 гривен, $\frac{3}{4}$ ведра – по 10 гривен.

Задачи на пропорции.

Данный тип задач трудно оформить в виде конкретных формул. Зато легко понять принцип решения.

Пример 10. Сколько томат-пасты, содержащей 30% воды, получится из 28 тонн томатов, содержащих 95% воды?

Решение: Составим два «уравнения» до и после выпаривания, учитывая, что при выпаривании «сухая часть» томатов не меняется, а уменьшается вода:

| | | | | | | | | | | | | |
|---------------|---|------|---|--------|---|-------------|---|---------------|---|------|---|-------|
| Сух. Вещество | + | Вода | = | Томаты | → | выпаривание | → | Сух. Вещество | + | Вода | = | Паста |
| 5% | | 95% | | 100% | | | | 70% | | 30% | | 100% |
| 1,4 т | | | | 28 т | | | | 1,4 т | | | | X т |

В первом «уравнении» 1,4 т нашли из пропорции:
$$\frac{y \text{ т} - 5\%}{28 \text{ т} - 100\%} = \frac{y}{28} \Rightarrow y = 28 \cdot 5 : 100 = 1,4.$$

Во втором «уравнении» получили пропорцию
$$\frac{1,4 \text{ т} - 70\%}{X \text{ т} - 100\%} = \frac{1,4}{X} \Rightarrow X = 1,4 \cdot 100 : 70 = 2(\text{т})$$

Ответ 2.

Пример 11. Некий леспромхоз решил вырубить сосновый лес, но экологи запротестовали. Тогда директор леспромхоза успокоил всех, сказав: «В нашем лесу 99% деревьев – это сосны. После рубки сосна будет составлять 98% всех деревьев». Какую часть леса вырубит леспромхоз?

Решение: Составим два «уравнения» до и после вырубки:

| | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|--------------|---|------|---|---------|---|-------|---|--------------|---|------|
| Сосны | + | Ост. деревья | = | Лес | → | вырубка | → | Сосны | + | Ост. деревья | = | Лес |
| 99% | | 1% | | 100% | | | | 98% | | 2% | | 100% |

1% X

Так как остальные деревья остаются нетронутыми, можем составить пропорцию:

$$\begin{array}{l} 1\% - X\% \\ 2\% - 100\% \end{array} \quad X = 100 \cdot 1 : 2 = 50\%$$

Если бы экологи лучше знали проценты, то директору леспромхоза не удалось бы их так легко перехитрить.

Ответ 50.

Пример 12. Груши, содержащие 65% воды, при сушке потеряли 50% своей массы. Сколько процентов воды содержат сушеные груши?

Решение: Составим два «уравнения» до и после сушки учитывая, что при сушке «сухая часть» груш не меняется, а уменьшается вода:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Сух. Вещество} + \text{Вода} & = & \text{Груши} & \rightarrow \text{сушка} \rightarrow & \text{Сух. Вещество} + \text{Вода} & = & \text{Сушен.груши} \\ 35\% & & 65\% & & 35\% & & 15\% & 50\% \\ & & & & & & X\% & 100\% \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Процент воды, найдем из пропорции: } X\% - 15\% \\ \phantom{\text{Процент воды, найдем из пропорции: }} 50\% - 100\% \end{array} \quad X = 50 \cdot 15 : 100 = 30\%$$

Ответ 30.