

## Тема № 26 «Задачи на работу и производительность».

В определенном смысле задачи на работу схожи с задачами на движение. Сравните формулы:  $S = vt$ ,  $V = vt$ . Роль скорости  $v$  здесь играет производительность труда, а роль расстояния  $S$  — объем работы  $V$ .

### Задачи на совместную работу

Для понимания схемы решения задач на совместную работу, рассмотрим упрощенную модель.

**Пример 1.** Вася с Колей мастерят из бумаги кораблики. Вася может сделать за 1 час 15 корабликов, а Коля только 10. Сколько времени им потребуется на 100 корабликов?

**Решение:** За 1 час мальчики делают  $15 + 10 = 25$  корабликов. Значит, 100 корабликов они сделают за  $100 : 25 = 4$  часа.

**Ответ 4.**

Итак, если дан общий объем работы и производительности труда «участников» задачи, то время совместной работы находят, разделив объем работы на совместную производительность труда:

$$t_{\text{совм}} = \frac{V}{v_1 + v_2}. \quad (1)$$

**Пример 2.** Вася выполняет свою работу за 2 часа, а Коля — за 3 часа. Сколько времени они потратят, если будут делать эту работу вдвоем?

**Решение:** Скорость работы каждого из мальчиков:  $v_1 = \frac{V}{t_1}$ ,  $v_2 = \frac{V}{t_2}$  подставим в формулу (1):  $t_{\text{совм}} = \frac{V}{\frac{V}{t_1} + \frac{V}{t_2}} = \frac{V}{V\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)} = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2}$ ,  $t_{\text{совм}} = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2}$  или  $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{t_{\text{совм}}}$ .

Поэтому, когда в задаче объем работы в явном виде не задан, его иногда удобно принять равным единице.

В нашей задаче  $t_{\text{совм}} = \frac{2 \cdot 3}{2 + 3} = 1,2$  (ч).

**Ответ 1,2.**

Иногда в задачах на совместную работу можно обойтись без решения уравнений, используя только арифметический способ. Правда, для этого порой приходится прибегать к гипотетическим допущениям. Рассмотрим такой пример.

**Пример 3.** Маша и Даша за день могут прополоть 3 грядки, Даша и Глаша — 4 грядки, а Глаша и Маша — 5 грядок. Спрашивается, сколько грядок за день смогут прополоть девочки, работая втроем?

**Решение:**

1-й способ: Вообразим, что сначала Маша и Даша работали один день, затем Даша и Глаша работали один день, а потом Глаша и Маша работали еще один день. Получается, что каждая из девочек работала два дня или что бригада, состоящая из Маши, Глаши и Даши, прополотла  $3 + 4 + 5 = 12$  грядок за два дня. Значит, за один день эта бригада прополотет вдвое меньше грядок, т. е. 6.

2-й способ: Обозначим  $\frac{1}{t_m} = m$ ,  $\frac{1}{t_d} = d$ ,  $\frac{1}{t_r} = g$  и подставим в систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{t_m} + \frac{1}{t_d} = \frac{3}{t_{\text{совм}}} \\ \frac{1}{t_r} + \frac{1}{t_d} = \frac{4}{t_{\text{совм}}} \\ \frac{1}{t_m} + \frac{1}{t_r} = \frac{5}{t_{\text{совм}}} \end{cases}, \quad \begin{cases} m + d = \frac{3}{t_{\text{совм}}} \\ g + d = \frac{4}{t_{\text{совм}}} \\ m + g = \frac{5}{t_{\text{совм}}} \end{cases}, \quad \begin{cases} m - g = \frac{3}{t_{\text{совм}}} - \frac{4}{t_{\text{совм}}} = -\frac{1}{t_{\text{совм}}} \\ m + g = \frac{5}{t_{\text{совм}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m - g = -\frac{1}{t_{\text{совм}}} \\ m + g = \frac{5}{t_{\text{совм}}} \end{cases}, \quad 2m = \frac{5}{t_{\text{совм}}} - \frac{1}{t_{\text{совм}}} = \frac{4}{t_{\text{совм}}}, \quad \begin{cases} m = \frac{2}{t_{\text{совм}}} \\ g = \frac{3}{t_{\text{совм}}} \\ d = \frac{1}{t_{\text{совм}}} \end{cases}$$

Тогда втроем они выполняют работу за  $t_{\text{совм}} = \frac{1}{\frac{2}{t_{\text{совм}}} + \frac{3}{t_{\text{совм}}} + \frac{1}{t_{\text{совм}}}} = \frac{t_{\text{совм}}}{6}$ .

Из последнего уравнения видим, что единица объема работы равна 6.

**Ответ 6.**

**Пример 4.** Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 часов. Через 3 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

**Решение:** Составим для удобства таблицу:

	V (объем работы)	v (производительность)	t (время работы)
1-й рабочий	V	$\frac{V}{15}$	15
2-й рабочий	V	$\frac{V}{15}$	15
1-й рабочий	$3 \cdot \frac{V}{15}$	$\frac{V}{15}$	3
Вместе	$V - \frac{3V}{15} = \frac{12V}{15}$	$\frac{V}{15} + \frac{V}{15} = \frac{2V}{15}$	$\frac{12V}{15} \div \frac{2V}{15} = 6$

Учитывая, что 1-й рабочий проработал 3 часа, а вместе работу доделали за 6 часов.

Общее время работы  $3 + 6 = 9$  часов.

**Ответ 9.**

### **Задачи на бассейны**

Иногда в задачах на работу выделяют группу задач на трубы и бассейны, решение которых, вообще говоря, не имеет никаких специфических черт по сравнению с другими задачами на совместную работу. Математическая модель остается той же. Только рабочим будут соответствовать насосы разной производительности, а объему работы – объем бассейна или иного резервуара.

**Пример 5.** Первая труба пропускает 15 литров воды в минуту, а вторая – 10. За сколько минут обе трубы наполнят бассейн, объемом 100 литров?

**Решение:** Через 1 минуту из 1-й трубы нальется 15 литров, а из второй – 10. Значит, за минуту обе трубы наливают  $15 + 10 = 25$  литров. Тогда бассейн в 100 литров они наполнят за время  $100 : 25 = 4$  минуты.

**Ответ 4.**

Итак, если дан объем резервуара и производительности работы труб (насосов), то время их совместной работы находят, разделив объем резервуара на совместную производительность труб:

$$t_{\text{совм}} = \frac{V}{v_1 + v_2}.$$

Если в задаче объем резервуара в явном виде не задан, его иногда удобно принять равным единице:

$$t_{\text{совм}} = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2} \quad \text{или} \quad \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{t_{\text{совм}}}.$$

**Пример 6.** Первая труба пропускает на 6 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если бак, объемом 360 литров она заполняет на 10 минут медленнее, чем вторая труба?

**Решение:** Составим для удобства таблицу:

	V	v	t
1-я труба	360	$v - 6$	$\frac{360}{v - 6}$
2-я труба	360	v	$\frac{360}{v}$

На 10 минут разница означает равенство:

$$\frac{360}{v-6} = \frac{360}{v} + 10, \quad | :10; \quad \frac{36}{v-6} = \frac{36}{v} + 1, \quad v(v-6) + 36v - 36 \cdot 6 - 36v = 0;$$

$$v^2 - 6v - 216 = 0; \quad v_1 = -12 - \text{не удовлетворяет условию, } v_2 = 18.$$

В задаче спрашивается скорость работы первой трубы, т.е.  $18 - 6 = 12$  л/мин.

**Ответ 12.**

### **Тренировочные задачи**

**Пример 7.** Двое рабочих выполнили работу за два дня. Если бы первый рабочий проработал 2 дня, а второй 1 день, то они вместе выполнили бы  $\frac{5}{6}$  всей работы. За сколько дней выполнит эту работу первый рабочий?

**Решение:**

	V (объем работы)	v (производительность)	t (время работы)
Вместе	$V = 1$	$x + y$	$\frac{1}{x + y} = 2$
1-й рабочий	$2x$	x	2
2-й рабочий	$1y$	y	1

Обозначим всю работу за 1, производительность первого рабочего за  $x$ , а производительность второго рабочего за  $y$ . Тогда, совместная производительность равна  $x + y$ . А на выполнение всей работы им потребуется  $1/(x + y)$  дней, по условию:

$\frac{1}{x + y} = 2$ . За два дня первый рабочий сделает  $2x$ , а второй рабочий –  $1y$ , всего они

выполнят  $2x + y = 5/6$ . Получили систему: 
$$\begin{cases} \frac{1}{x + y} = 2 \\ 2x + y = \frac{5}{6} \end{cases}$$
. Решая эту систему, найдем

производительности рабочих:  $x = \frac{1}{3}$ ,  $y = \frac{1}{6}$ . Тогда время, которое затратит первый

рабочий на выполнение всей работы равно:  $\frac{1}{x} = 3$  дня.

**Ответ 3.**

**Пример 8.** Ученик прочел книгу в 480 страниц, ежедневно читая одинаковое количество страниц. Если бы он читал каждый день на 16 страниц больше, то прочел бы книгу на 5 дней раньше. Сколько дней ученик читал книгу?

Решение: Пусть ученик читал в день  $x$  страниц. Тогда он прочитал книгу за  $\frac{480}{x}$  дней.

Если бы он читал  $x + 16$  страниц в день, то он прочитал бы книгу за  $\frac{480}{x + 16}$  дней, что на 5

дней меньшею. Получаем уравнение:  $\frac{480}{x} = \frac{480}{x + 16} + 5$ .

Решая его, находим, что ученик в день читал  $x = 32$  страницы и прочитал книгу за 15 дней.

**Ответ: 15.**

**Пример 9.** Двое рабочих выполнили работу менее, чем за 4 часа. Если бы первый выполнял ее в одиночку, он сделал бы работу на 6 часов быстрее, чем второй. Какие значения может принимать время выполнения работы первым из рабочих, работающим отдельно?

**Решение.** Обозначим всю работу за 1, производительность первого рабочего за  $x$ , а производительность второго рабочего за  $y$ . Тогда, совместная производительность равна  $x + y$ . А на выполнение всей работы им потребуется  $\frac{1}{x + y}$  дней, по условию:

$\frac{1}{x + y} < 4$ . Время, за которое может выполнить работу первый рабочий выражается:  $\frac{1}{x}$ ,

а время второго:  $\frac{1}{y}$ . По условию:  $\frac{1}{x} + 6 = \frac{1}{y}$ . Итак, получили систему: 
$$\begin{cases} \frac{1}{x + y} < 4 \\ \frac{1}{x} + 6 = \frac{1}{y} \end{cases}$$
. Так как

производительность – величина положительная, то неравенства в системе равносильно следующему:  $4x + 4y > 1$ . Выразим  $x$  из уравнения и подставим в

неравенство:  $4x + \frac{4x}{1+6x} > 1$ . Решая это неравенство, получаем:  $x > \frac{1}{4}$  или  $x < -\frac{1}{3}$ .

Условию соответствует первое неравенство. Следовательно,  $\frac{1}{x} < 4$ .

**Ответ:** время выполнения работы первым из рабочих, работающим отдельно, может принимать значения, не большие 4.