Тема №24. «Задачи на проценты, части, доли»

Формула простого процентного роста (формула простых процентов):

$S_n = S \cdot \left(1 + \frac{pn}{100}\right)$, где S_n – наращенная сумма (исходная сумма вместе с начисленными процентами); S — исходная сумма; p%— процентная ставка от суммы, выраженная в долях за период; n — число периодов начисления.

Пример 1. Как изменится X, если его последовательно сначала увеличить на 10%, а потом уменьшить на 10%?
Решение: Неправильный ответ – не изменится.
Увеличить X на 10% означает: X + 0,1X = 1,1X. Уменьшаем на 10% уже не X, а 1,1X:
1,1X – 0,1(1,1X) = 1,1X – 0,11X = 0,99X. Значит, число уменьшилось на 1% по сравнению с первоначальным.
Ответ уменьшится на 1%.

Пример 2. Как изменится X, если его последовательно увеличить на p% два раза подряд?
Решение: 1-й раз увеличили X на p%, получили X + Xp/100 = X(1 + p/100).
2-й раз увеличили X(1 + p/100) на p%, получим:
$X(1 + p/100) + p/100(X(1 + p/100)) = X(1 + p/100)^2$.

Пример 3. Как изменится X, если его последовательно увеличить на p% n раз подряд?
Решение: Продолжая рассуждение в примере №7, получим формулу:
$X(1 + p/100)^n$.

Формула сложного процентного роста (формула сложных процентов):

$S_n = S \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, где S_n — наращенная сумма (исходная сумма вместе с начисленными процентами); S — исходная сумма; p% — процентная ставка от суммы, выраженная в долях за период; n — число периодов начисления.

Пример 4. Как изменится X, если его последовательно уменьшать на p% n раз подряд?
Решение: аналогично строя рассуждения, как в примерах №7 и 8, получим формулу:
Ответ $X(1 – p/100)^n$.

Пример 5. Пальто дешевле шубы на 20%. На сколько процентов шуба дороже пальто?
Решение: Пусть П – стоимость пальто, Ш – стоимость шубы.
П = 0,8Ш, тогда Ш = П : 0,8; Ш = 1,25П. Т. е. шуба дороже пальто на 25%.
Ответ 25.

Пример 6. Пять рубашек дешевле куртки на 25%. На сколько процентов семь рубашек дороже куртки?
Решение: Пусть Р – стоимость рубашки, К – стоимость куртки.
5Р = 0,75К; отсюда Р = 0,75К/5 =0,15К. тогда 7Р = 7 ·0,15К = 1,05К.
Т.е. 7 рубашек дороже куртки на 5%.
Ответ 5.

Пример 7. Три числа относятся как 5:6:10. Если первое число уменьшить на 10%, а второе – на 20%, то на сколько % надо увеличить третье число, чтобы сумма не изменилась?
Решение: 5X + 6X + 10X = (5 - 0,5)X + (6 -1,2)X + (10 + p)X
21X = 4,5X + 4,8X + (10 + p)X
11,7X = (10 + p)X | :X
11,7 = 10 + p
p = 1,7 или 17%.
Ответ 17%.

Пример 8. Три числа относятся как 8/19 : 0,6 : 93/95. Третье числа больше половины первого на 36,5. Найти большее из чисел.
Решение: Пусть первое число 8X/19; второе – 0,6X; третье – 93X/95.

По условию 3-е больше ½ первого на 36,5:

$$\frac{93}{95}\mathrm{X}-\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{19}\mathrm{X}=36{,}5;\ \mathrm{X}\left(\frac{93}{95}-\frac{4}{19}\right)=\frac{73}{2};\frac{73}{95}\mathrm{X}=\frac{73}{2};$$ X = 46,5. Тогда

первое число (8/19) ·46,5 = 20

второе число 0,6 ·46,5 = 28,5

третье число (93/95) ·46,5 = 41,5 – наибольшее из чисел.

Ответ 41,5.

Пример 9. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. На сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если выставленный на продажу за 8000 рублей, он через два года был продан за 6480 рублей?
Решение: Согласно формуле примера №10 получим уравнение:
8000(1 – p/100)2 = 6480; (1 – p/100)2 =0,81; откуда 1 – p/100 = 0,9 или
1 – p/100 = –0,9. Второе уравнение не удовлетворяет смыслу задачи, а из первого находим p = 10%.
Ответ 10.

Пример 10. Чему равна первоначальная сумма вклада (в рублях), если после двух лет она выросла на 304,5 рубля при 3% годовых?

Решение: Пусть X - первоначальная сумма вклада. Согласно формуле сложного процента получим уравнение: $X(1 + 0,03)^2 = X + 304,5$; $1,0609X = X + 304,5$;
$0,0609X = 304,5$; $X = 5000$ (руб.)
Ответ 5000.

Пример 11. Сбербанк в конце года начисляет 3% к сумме, находившейся на счету. На сколько рублей увеличится первоначальный вклад в 1000 рублей через 2 года?
Решение: Согласно формуле сложного процента получим:
$1000(1 + 0,03)^2 = 1000\cdot 1,0609 = 1060,9$ (руб.) Т.е. вклад увеличится на
$1060,9 – 1000 = 60,9$ (руб.)
Ответ 60,9.

Пример 12. Цену на автомобиль поднимали два раза: сначала на 25%, а затем на 20%. Во сколько раз новая цена на автомобиль больше первоначальной цены?
Решение: Пусть X – первоначальная цена автомобиля. Тогда цена после первого повышения составит 1,25%А = 1,25А, а после второго повышения:
120%(1,25А) = 1,2 – 1,25А = 1,5А. Значит, новая цена на автомобиль больше первоначальной цены в 1,5 раза.
Ответ 1,5.

Пример 13. Когда рабочий сделал 2484 детали, то оказалось, что он выполнил 46% месячной нормы. Сколько деталей составляет месячная норма рабочего?
1) 5400 2) 4600 3) 2116 4) 1600
Решение. 1-й способ:
Пусть месячная норма составляет x деталей. Тогда
2484 деталей – 46% $x = 2484\cdot 100/46 = 5400$
x деталей – 100%
2-й способ:
Задача сводится к нахождению числа по его проценту:
2484 : 0,46 = 5400, что соответствует первому варианту ответов.
Ответ 1.

Пример 14. В двух группах 50 учащихся. Когда число учащихся первой группы уменьшили на 20 %, а второй группы увеличили на 40 %, то в первой группе стало на 4 ученика меньше, чем во второй. Сколько учащихся было в каждой группе первоначально?
Решение. Пусть x и y – число учеников в первой и второй группах соответственно, тогда в обеих группах: x + y = 50. Когда число учащихся первой группы уменьшили на 20 %, то их число стало x – 0,2x = 0,8x. Когда число учащихся второй группы увеличили на 40 %, то их стало y + 0,4y = 1,4y. А разница в численном количестве учеников стала 1,4y – 0,8x = 4. решим систему уравнений способом сложения:

$$\begin{cases} x + y = 50, \\ 1,4y - 0,8x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 50, \\ -4x + 7y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 200, \\ -4x + 7y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y = 220, \\ x + y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20, \\ x = 30 \end{cases}$$

Ответ 20;30.

Пример 15. Цена товара сначала снизилась на 40%, а затем его новая цена повысилась на 40%. Сравните последнюю цену товара с его первоначальной ценой.

1) цена стала ниже 2) цена стала выше

3) не изменилась 4) для ответа не хватает данных

Решение. Пусть товар стоил x руб., тогда после снижения на 40% он стал стоить x – 0,4x = 0,6x (руб). А эту цену повысили на 40%, т.е.товар стал стоить:

0,6x + 0,4·0,6x = 0,6x +0,24x =0,84x.

Таким образом, товар стоил x руб, а стал стоить 0,84x, т.е. на 16% меньше.

Ответ 1.

Пример 16. Двузначное число в 4 раза больше суммы своих цифр, а квадрат этой суммы в 2,25 раза больше самого числа. Найти это число.

Решение: Пусть 10A + B – данное число.

$$\begin{cases} 10A + B = 4(A+B), \\ (A+B)^2 = 2{,}25(10A+B), \end{cases} \quad \begin{cases} 10A - 4A = 4B - B, \\ \left(\frac{10A+B}{4}\right)^2 = \frac{9}{4}(10A+B), \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6A = 3B, \\ \left(\frac{10A+B}{4}\right)\left(\frac{10A+B}{4} - 9\right) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} B = 2A, \\ 10A + B = 36, \end{cases} \begin{cases} B = 2A, \\ 12A = 36, \end{cases} \begin{cases} B = 6, \\ A = 3. \end{cases}$$

10A +B = 36.

Ответ 36.

Пример 17. Сумма кубов цифр двузначного числа равна 243, а произведение суммы его цифр на произведение цифр этого числа равно 162. Найти это число.

Решение: Пусть 10A + B – данное число.

$$\begin{cases} A^3 + B^3 = 243 = 3^5, \\ (A+B)AB = 162 = 2\cdot 3^4, \end{cases} \begin{cases} (A+B)(A^2 - AB + B^2) = 3^5, & (1) \\ (A+B)AB = 2\cdot 3^4, & (2) \end{cases}$$

Разделим (1) на (2): $\frac{A^2-AB+B^2}{AB} = \frac{3}{2}$, $\quad \frac{A}{B} + \frac{B}{A} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$,

Пусть A/B = t. $t + \frac{1}{t} - \frac{5}{2} = 0$, $\quad 2t^2 – 5t +2 =0$, $t_1 = 2$, $t_2 =1/2$.

Получим две системы: A/B=2/1 или A/B = ½.

$$\begin{cases} A = 2B, \\ (2B+B)B2B = 162, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} B = 2A, \\ (2A+A)A2A = 162, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 2B, \\ 6B^3 = 2\cdot 3^4, \end{cases} \qquad \begin{cases} B = 2A, \\ 6A^3 = 2\cdot 3^4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 2B, \\ B^3 = 27, \end{cases} \qquad \begin{cases} B = 2A, \\ A^3 = 27, \end{cases}$$

$\begin{cases} A = 6 \\ B = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} A = 3 \\ B = 6. \end{cases}$

10A+B=63 10A+B=36.

Ответ 63 или 36.

Пример 18. Некоторая сумма, больше 1000 рублей была помещена в банк и после первого года хранения проценты, начисленные на вклад, составили 400 рублей. Владелец вклада добавил на счет еще 600 рублей. После второго года хранения и начисления процентов сумма на вкладе стала равной 5500 рублям. Какова была первоначальная сумма вклада, если процентная ставка банка для первого и второго годов хранения была одинакова?
Решение: Пусть X руб. – первоначальная сумма.

После 1-го года хранения сумма стала (X + 400) руб. Согласно формуле простых процентов: X(1 + p/100) = X + 400,

X + Xp/100 = X +400, Xp/100 = 400, откуда Xp=40000, p = 40000/X.

Уравнение после 2-го года хранения, учитывая добавление на вклад 600 руб., примет вид: (X + 1000)(1 + p/100) = 5500. Раскроем скобки:

X + Xp/100 + 1000 + 10p = 5500, заметим, что Xp/100 = 400, тогда уравнение примет вид: X + 10p = 4100. Подставим в него p = 40000/X, полученное в первом уравнении, и перейдем к квадратному уравнению:

$X^2 - 4100X + 400000 = 0$. Решая, которое получим два корня $X_1 = 100$ и $X_2 = 4000$.

По условию задачи сумма была больше 1000, т.е. походит только второе решение.

Ответ 4000.