Тема № 23 «Декартовы координаты. Уравнения фигур. Векторы»

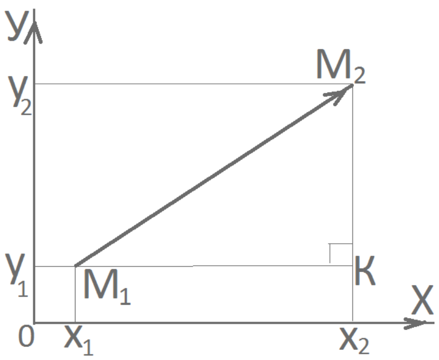
Декартовы координаты

Система, состоящая из начала координат O(0; 0) и взаимно перпендикулярных координатных осей, называется ***декартовой системой координат*** на плоскости, а координаты точек – ***декартовыми координами***.

В декартовой системе координат на плоскости имеют место следующие формулы:

1) Если даны две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, то $M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

2) Координаты середины отрезка (точки C) с концами в точках $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$: $C\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}; \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.



Векторы

Вектор – это направленный отрезок. Его длиной считают длину отрезка.

Если даны две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ то ***координаты вектора***

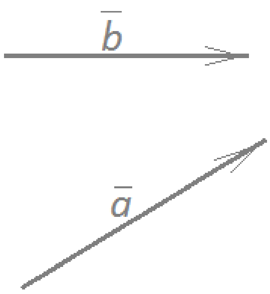
$\overline{n} = \overline{(M_1M_2)(x_2 - x_1, y_2 - y_1)}$

Расстояние между двумя точками – это длина отрезка M_1M_2 или ***длина вектора*** n:

$$|\overline{n}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Действия с векторами

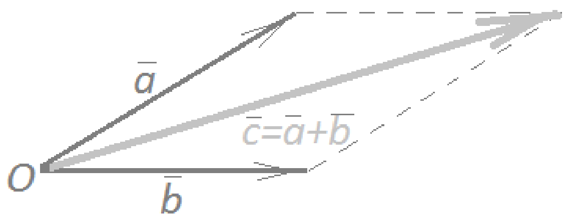
Если даны два вектора $\overline{a}(x_1, y_1)$ и $\overline{b}(x_2, y_2)$, то

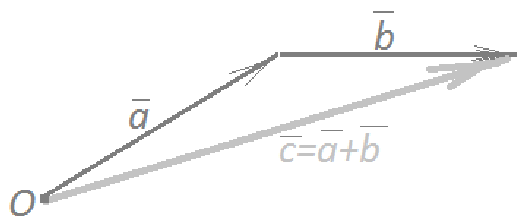


1) ***длины векторов***:

$|\overline{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $|\overline{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

2) ***сумма векторов:***

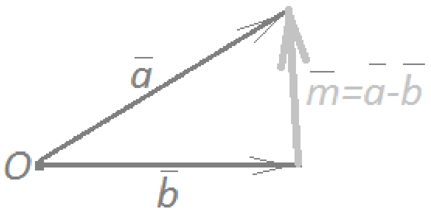




$\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

Суммой двух векторов *a* и b является диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах, исходящая из общей точки их приложения (правило параллелограмма); или вектор, соединяющий начало первого вектора с концом последнего – по правилу треугольника.

3) ***разность векторов:***



$\overline{a} - \overline{b} = \overline{m}(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

4) ***умножение вектора на число (скаляр):***

$\overline{t} = k\overline{b}(kx_2, ky_2)$

Векторы t и b называются ***коллинеарными***, т.е. лежат на параллельных прямых или на одной прямой. Пропорциональные координаты – условие коллинеарности векторов.

5) ***скалярное произведение векторов:***

$\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

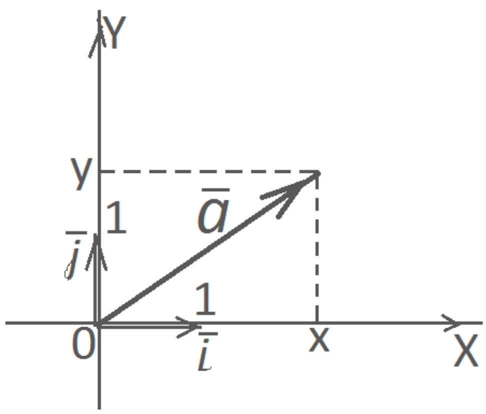
$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos($

Если скалярное произведение равно нулю, то векторы перпендикулярны.

6) ***угол между векторами a и b, точнее его косинус:***

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

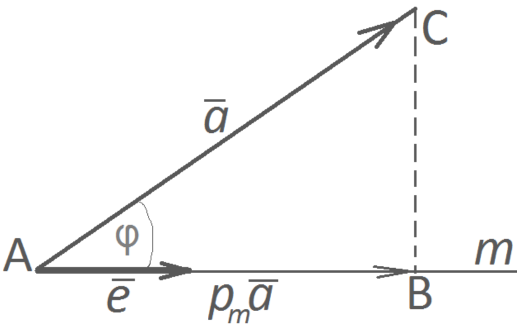
Разложение вектора по двум векторам



Три ненулевых вектора *a, b, c* лежат в одной плоскости (***компланарные),*** когда один из них выражается через два других, т.е. $\overline{c} = n\overline{a} + m\overline{b}$, где n, m – числа.

Любой вектор $\vec{a}(x, y)$ можно разложить с помощью единичных векторов координатной плоскости $\vec{i}(1, 0)$ *и* $\vec{j}(0, 1)$ следующим образом: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Проекция вектора на ось



Пусть m – ось, $\vec{e}$ - ее орт. Тогда проекцией $p_m\vec{a}$ любого ненулевого вектора $\vec{a}$ на ось m называется число $p_m\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi, \quad где \quad \varphi = \angle\vec{a}\vec{e}$.

Например, проекция вектора $\vec{a}(x_1, y_1)$ на вектор $\vec{b}(x_2, y_2)$ вычисляется по формуле:

$$p_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi = |\vec{a}|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} .$$

Уравнения фигур на плоскости

1) Общее уравнение прямой: $ax + by + c = 0$
2) Уравнение прямой с угловым коэффициентом k: y = kx + b.
3) Уравнение прямой, проходящей через заданную точку A(x_0 ; y_0): $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = k$
4) Уравнение прямой в отрезках: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, где a, b – отрезки, отсекаемые прямой на осях абсцисс и ординат соответственно.
5) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки A(x_1;y_1) и B(x_2;y_2): $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.
6) Парабола: $y = ax^2 + bx + c; \quad y = px^2$
7) Гипербола: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
8) Эллипс: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
9) Окружность с центром в начале координат радиуса R: $x^2 + y^2 = R^2$
10) Окружность с центром в точке (a, b) радиуса R: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

Взаимное расположение фигур на плоскости

Расстояние от точки A(x_0 ; y_0) до прямой $ax + by + c = 0$ вычисляется по формуле $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Взаимное расположение прямых, заданных общими уравнениями:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

1) Условие параллельности прямых: $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

2) Условие перпендикулярности прямых: $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

3) Угол α между прямыми может быть найден по формулам:

$$\sin\alpha = \frac{|a_1b_2 - a_2b_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \text{ или } \cos\alpha = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Взаимное расположение прямых, заданных уравнениями с угловыми коэффициентами: $y = k_1x + b_1 \quad u \quad y = k_2x + b_2$

1) Условие параллельности прямых: $k_1 = k_2$.
2) Условие перпендикулярности прямых: $k_1 \cdot k_2 = -1$.
3) Угол α между прямыми может быть найден по формуле: $tg\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|$

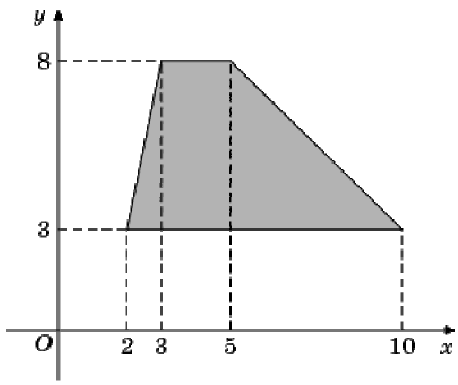
Пример 1. Найти косинус угла между векторами *a* = (4; 3) и b = (0; 12).

Решение. Поскольку координаты векторов даны, подставляем их в формулу №6:

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{4 \cdot 0 + 3 \cdot 12}{\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{0^2 + 12^2}} = \frac{36}{5 \cdot 12} = 0{,}6$$

Ответ 0,6.

Пример 2. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (2;3), (10;3), (5;8), (3;8).



Решение. Воспользуемся формулой нахождения площади трапеции: $S = \frac{a+b}{2}h$, где *a*, *b* - длины оснований трапеции, *h* – высота трапеции. Обратимся к иллюстрации. Вычислим *a=10-2=8*, аналогично *b=5-3=2*. Мы воспользовались приемом нахождения длинны отрезка в системе координат. Вычислим высотку трапеции: *h=8-3=5*.

Таким образом, $S = \frac{a+b}{2}h = \frac{8+2}{2}5 = 25$.

Ответ: 25.

Пример 3. Найти проекцию вектора $\vec{a}(2, 1)$ на вектор $\vec{b}(1, 3)$.

Решение. Найдем искомую проекцию по формуле: $p_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

$$p_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{2\cdot 1 + 1\cdot 3}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{2{,}5}$$

Ответ $\sqrt{2{,}5}$.

Пример 4. Установить взаимное расположение двух прямых:

n: $5x - 2y + 7 = 0$; m: $5x - 2y + 11 = 0$.

1) пересекаются 2) параллельны 3) перпендикулярны 4) совпадают

Решение.

Проверим условие параллельности. Если прямые заданы уравнениями:

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, то они параллельны, если $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. В нашем случае $5(-2) - (-2)5 = -10 + 10 = 0$, следовательно прямые параллельны, что соответствует варианту 2).

Ответ 2.

Пример 5. Найти длину вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$.

Решение. Данная запись означает, что вектор a имеет координаты $\vec{a}(2, -4)$, тогда его длина равна $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Ответ $2\sqrt{5}$.

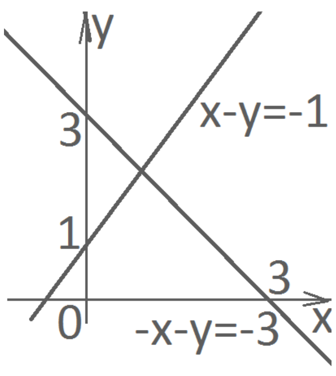
Пример 6. Определите координаты центра окружности и длину радиуса окружности, заданной уравнением: $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 121$.

1) $(3; -5)$, R =11 2) $(-3; 5)$, R = 121 3) $(-3; 5)$, R = 11 4) $(3; 5)$, R = 11

Решение.

Окружность с центром в точке (a, b) радиуса R: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Поэтому имеем центр в точке $(-3; 5)$, а радиус R = 11, что соответствует варианту 3).

Ответ 3.



Пример 7. Найти координаты точки пересечения прямых, представленных на рисунке.

Решение. Для нахождения координат точки пересечения прямых, решим систему уравнений:

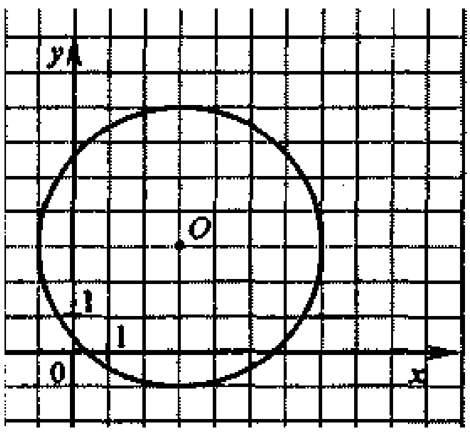
$$\begin{cases} x - y = -1, \\ -x - y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y = -4, \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, \\ x = -1 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, \\ x = 1 \end{cases}.$$

Ответ (1; 2).

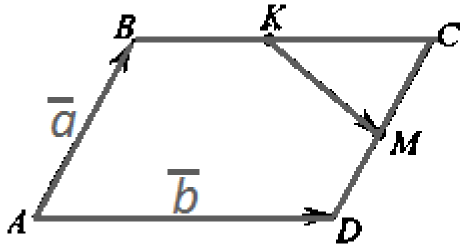
Пример 8. Найти координаты середины отрезка АВ, если А(1; – 2), В(5; 6).
Решение. Воспользуемся формулой середины отрезка :
Координаты середины отрезка (точки С) с концами в точках $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:
$C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$. Получим $C\left(\frac{1+5}{2}, \frac{-2+6}{2}\right) = C(3, 2)$.
Ответ (3; 2).

Пример 9. Какие из точек А(1; 2), В(3; 4), С(– 4 ; 3), К(0; 5), Р(5; – 1) - принадлежат окружности, заданной уравнением: $x^2 + y^2 = 25$?
1) А, В 2) В, С 3) А, Р 4) В, С, К
Решение. Подставим координаты всех точек по очереди в уравнение окружности и проверим равенство.
А: $1^2 + 2^2 \neq 25$, следовательно, точка А не принадлежит окружности.
В: $3^2 + 4^2 = 25$, следовательно, точка В принадлежит окружности.
С: $(-4)^2 + 3^2 = 25$, следовательно, точка С принадлежит окружности.
К: $0^2 + 5^2 = 25$, следовательно, точка К принадлежит окружности.
Р: $5^2 + (-1)^2 \neq 25$, следовательно, точка Р не принадлежит окружности.
Из ответов верным является 4).
Ответ 4.

Пример 10. Найти координаты точки В, если $\overrightarrow{AB}(4, -3)$, $A(1, -3)$.
Решение. Пусть В(х; у). По правилу вычисления координат вектора имеем:
$\overrightarrow{AB}(x-1, y+3) = \overrightarrow{AB}(4, -3)$.
Координаты находим из уравнений: х – 1 = 4, х = 5; у + 3= – 3, у = – 6.
Ответ (5; – 6).



Пример 11. По данному чертежу определите уравнение окружности.
1) $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 3\sqrt{2}$.
2) $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 16$.
3) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 4$.
4) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 16$.
Решение.
Согласно рисунку центр круга в точке (3; 3), а радиус R = 4. Получим уравнение окружности:
$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 16$, что соответствует варианту 4).
Ответ 4.



Пример 12. ABCD – параллелограмм, точки К и М – середины сторон ВС и CD соответственно. Если $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, то вектор КМ равен:

1) $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$ 2) $\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$ 3) $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$ 4) $-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

Решение. Вектор BD найдем как разность векторов: $\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}$.
Векторы КМ и BD сонаправлены. По свойству средней линии треугольника КМ = BD/2 или для векторов: $\overrightarrow{KM}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$. Это второй вариант ответов.
Ответ 2.

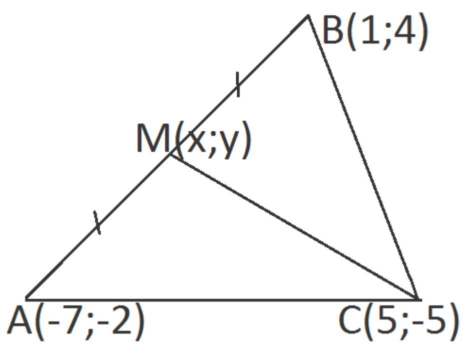
Пример 13. Даны векторы $\vec{a}(4;-1)$, $\vec{b}(2;\,0{,}5)$, $\vec{c}(-6;\,1{,}5)$, $\vec{d}(-2{,}5;-1{,}5)$. Противоположно направленными среди них являются

1) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 2) $\vec{a}$ и $\vec{c}$ 3) $\vec{c}$ и $\vec{b}$ 4) $\vec{b}$ и $\vec{d}$

Решение. Противоположно направленными называются векторы, которые параллельны, т.е. их координаты пропорциональны с отрицательным коэффициентом пропорциональности.
Разделив покоординатно, проверим каждый из четырех вариантов:

1) для x: 4/2 = 2, для y: – 1/0,5 = – 2, 2 ≠ – 2, следовательно, *a* и b не являются.
2) для x: 4/(-6) = – 2/3, для y: – 1/1,5 = – 2/3, – 2/3 = – 2/3, поэтому, *a* = -2c/3, векторы *a* и c являются противоположно направленными.
3) для x: -6/2 = -3, для y: 1,5/0,5 = 3, 3 ≠ – 3, следовательно, c и b не являются.
4) для x: 2/(-2,5)2 = -0,8, для y: 0,5/(– 1,5) = – 1/3, -0,8 ≠ –1/3, следовательно, b и d не являются.

Ответ 2.



Пример 14. Найти длину медианы, проведенной из точки С в треугольнике АВС, если координаты вершин треугольника: А(-7; -2), В(1; 4), С(5; -5).

Решение. Изобразим на рисунке треугольник и для удобства, подпишем координаты вершин. Точка М – середина отрезка АВ, ее координаты $M\left(\frac{-7+1}{2};\frac{-2+4}{2}\right)=M(-3;1)$. Тогда длину отрезка СМ, с координатами концов М(-3; 1), С(5; -5) найдем по формуле

$CM=\sqrt{(5-(-3))^2+(-5-1)^2}=\sqrt{64+36}=10$.

Ответ 10.