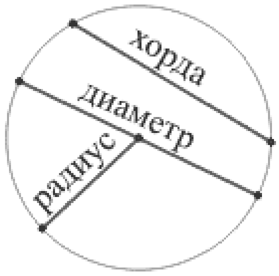
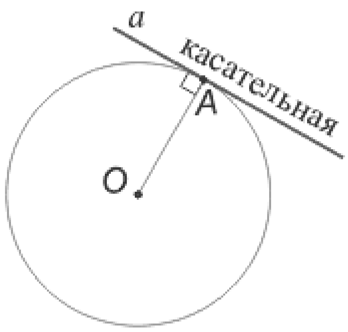
Тема № 22 «Окружности».

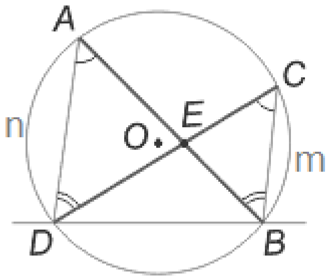


Окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки.
Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется ***кругом.***
Эта точка (О) называется ***центром окружности.***
Расстояние (r) от точки окружности до ее центра называется ***радиусом*** окружности. Радиусом называется также любой отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром.
Хорда — отрезок, соединяющий две точки окружности.
Хорда, проходящая через центр окружности, называется ***диаметром*** (d=2r).

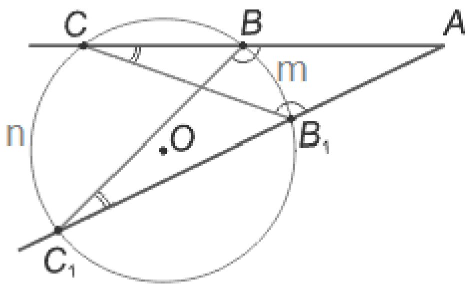


Касательная — прямая (а), проходящая через точку (А) окружности перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку.
При этом данная точка (А) окружности называется ***точкой касания***.

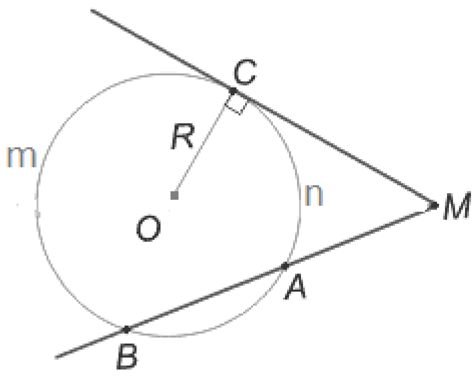
Пропорциональные линии в круге



Если **две хорды** АВ и CD пересекаются внутри круга в точке Е, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды, т. е. $AE \cdot EB = DE \cdot EC$
Угол между секущими АВ и CD равен $\angle AED = (n + m)/2$

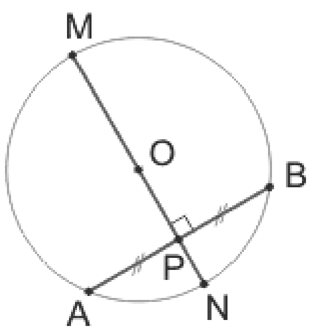


Если из точки, взятой вне окружности, проведены **две секущие** АС и AC_1, то справедливо равенство $AB \cdot AC = AB_1 \cdot AC_1$.
Угол между секущими АС и AC_1 равен
$\angle CAC_1 = (n – m)/2$



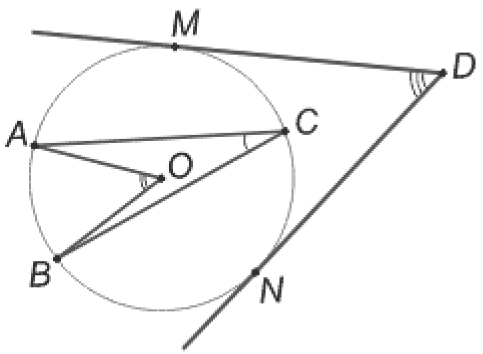
Теорема о квадрате касательной

Если из точки, лежащей вне круга, проведены **секущая** МВ **и касательная** МС, то справедливо равенство
$MC^2 = MB \cdot MA$
Угол между секущей и касательной $\angle CMB = (m – n)/2$



Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, проходит через ее середину.

Обратно: если диаметр проходит через середину хорды, то он ей перпендикулярен.



Углы в круге

Центральный угол — угол, образованный двумя радиусами (∠AOB).

Вписанный угол — угол, образованный двумя хордами CA и CB, исходящими из одной точки на окружности (∠ACB).

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу (хорду) равны: ∠ACB = ∠AMB = ∠ANB.

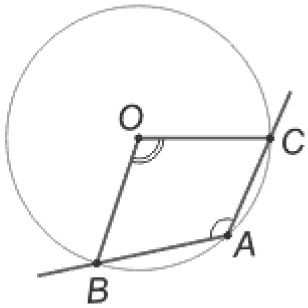
Вписанный угол, опирающийся на диаметр равен 90^0.

Центральный угол имеет ту же градусную меру, что и дуга, на которую он опирается.

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

$\angle ACB = \frac{\angle AOB}{2}$

Описанный угол — угол, образованный двумя касательными DM и DN (∠MDN).

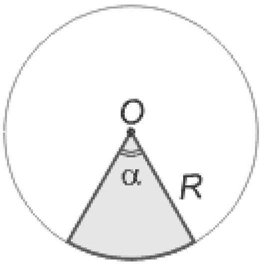


Угол, образованный двумя хордами и опирающийся на них центральный угол связаны соотношением $\angle BAC = 180^0 - \frac{1}{2}\angle BOC$

Длина окружности $C = 2\pi R = \pi d$

Длина дуги, соответствующая центральному углу в n° $L = \frac{\pi R}{180^0} n^0$

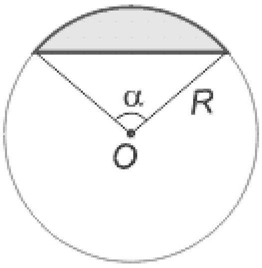
Площадь круга $S = \pi R^2 = \dfrac{\pi d^2}{4} = \dfrac{Cd}{4}$



Круговой сектор — часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла.

Площадь кругового сектора $S = \dfrac{\pi R^2}{360^0}\alpha$**,** где α — градусная мера угла, R — радиус круга.

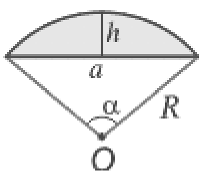
Квадрант — сектор, отсекаемый радиусами, образующими угол 90°.



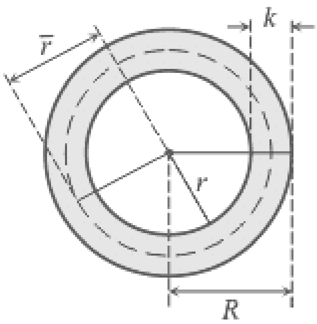
Круговой сегмент — общая часть круга и полуплоскости, граница которой содержит хорду этого круга.

Площадь сегмента, не равного полукругу $S = \dfrac{\pi R^2}{360^0}\alpha \pm S_\Delta$

где α — градусная мера центрального угла, которая содержит дугу этого кругового сегмента, S_Δ — площадь треугольника с вершинами в центре круга и концах радиусов, ограничивающих соответствующий сектор. Знак «−» надо брать, когда α<180°, а знак «+», α>180°.



Основание и высота сегмента $a = 2R \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2}; \quad h = \dfrac{a}{2} \cdot tg\dfrac{\alpha}{4}$



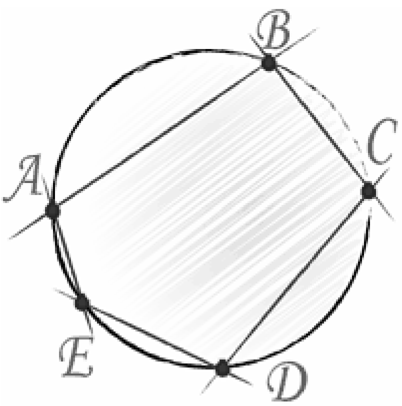
Круговое кольцо $S = \pi(R^2 - r^2) = \dfrac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = 2\pi rk$

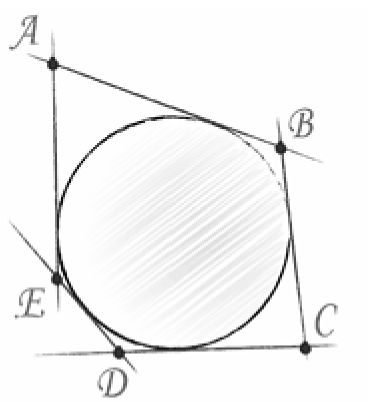
R, r — внешний и внутренний радиусы;

D, d — внешний и внутренний диаметры;

$\bar{r}$ — средний радиус; k — ширина кольца.

Правила для многоугольников которые можно вписать в окружность и описать окружность вокруг них



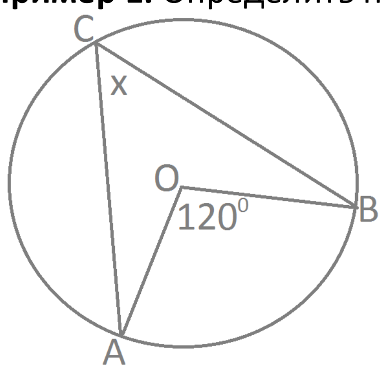


Вписанный многоугольник Описанный многоугольник

- Если многоугольник взят произвольно, то в него нельзя вписать и около него нельзя описать окружность.
- Только многоугольники соответствующие некоторым правилам можно описать окружностью или вписать в них окружность.
- Для треугольника всегда возможны и вписанная окружность и описанная окружность.
- Для четырехугольника окружность можно вписать только в том случае, если суммы его противоположных сторон одинаковы.
- Из всех параллелограммов только в ромб и квадрат можно вписать окружность. Ее центр лежит на пересечении диагоналей.
- Вокруг четырехугольника окружность можно описать только если сумма противоположных углов равна 180°.
- Из всех параллелограммов только около прямоугольника и квадрата можно описать окружность. Ее центр лежит на пересечении диагоналей.
- Вокруг трапеции возможно описать окружность или в трапецию можно вписать окружность если трапеция равнобокая.

В примерах с 1 по 10 надо найти неизвестную величину по рисунку.

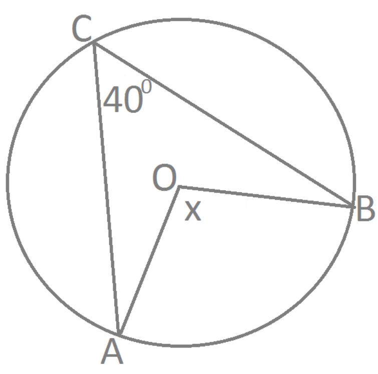
Пример 1. Определить неизвестный угол по рисунку.



Решение. $\angle ACB = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{120^0}{2} = 60^0$

Ответ 60 **.**

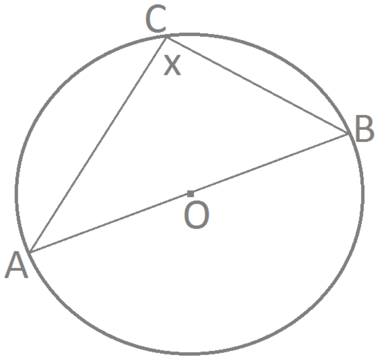
Пример 2. Определить неизвестный угол по рисунку.



Решение. $\angle ACB = \frac{\angle AOB}{2} \Rightarrow \angle AOB = 2 \cdot 40^0 = 80^0$

Ответ 80.

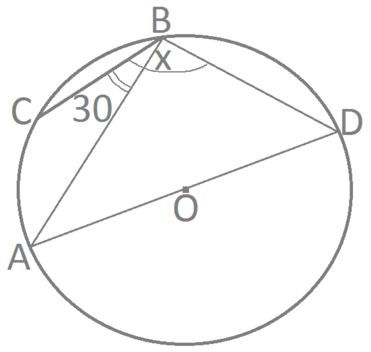
Пример 3. Определить неизвестный угол по рисунку.



Решение. $\angle ACB = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{180^0}{2} = 90^0$

Ответ 90.

Пример 4. Определить неизвестный угол по рисунку.

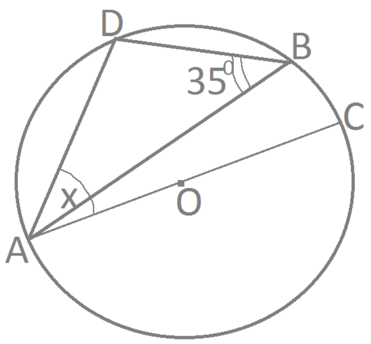


Решение.

$$\angle ABD = \frac{\angle AOD}{2} = \frac{180^0}{2} = 90^0$$

$$x = \angle CBD = 90^0 + 30^0 = 120^0$$

Ответ 120.



Пример 5. Определить неизвестный угол по рисунку.

Решение.

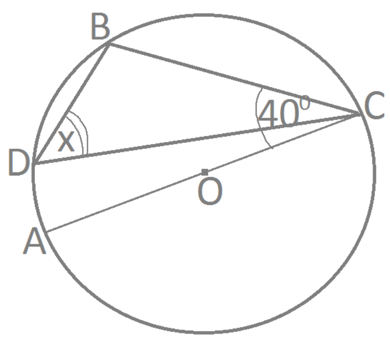
$$\angle ADC = \frac{\angle AOC}{2} = \frac{180^0}{2} = 90^0$$

$$\angle DCA = \angle DBA = \cup AD = 35^0$$

$$\angle DAC = \angle ADC - \angle DCA = 90^0 - 35^0 = 55^0$$

Ответ 55.

Пример 6. Определить неизвестный угол по рисунку.



Решение.

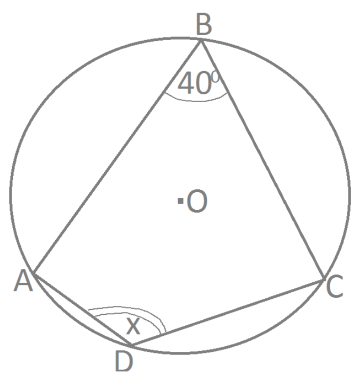
$$\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2} = \frac{180^0}{2} = 90^0$$

$$\angle BAC = \angle ABC - \angle BCA = 90^0 - 40^0 = 50^0$$

$$x = \angle BDC = \angle BAC = \cup BC = 50^0$$

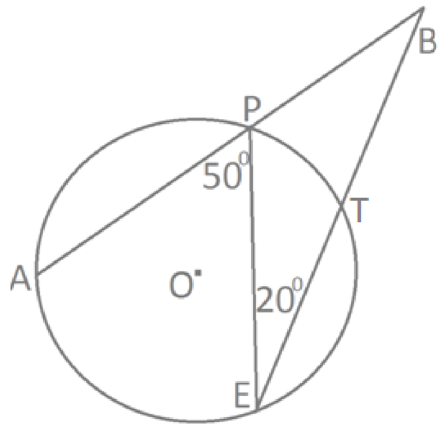
Ответ 50.

Пример 7. Определить неизвестный угол по рисунку.



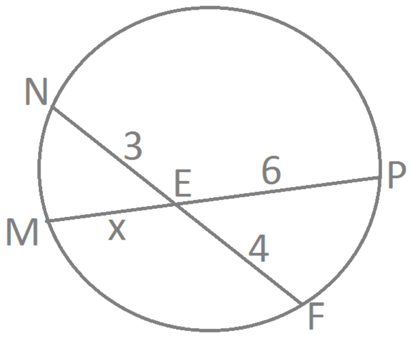
Решение. Вокруг четырехугольника окружность можно описать, если сумма противоположных углов равна 180°.
Значит, x = 180 – 40 =140^0.
Ответ 140.

Пример 8. Определить неизвестный угол по рисунку.



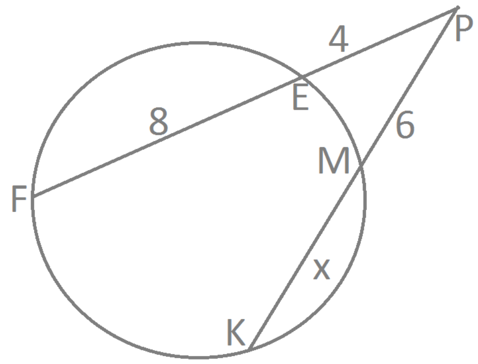
Решение. $\angle AOE = 2\cdot 50 = 100^0$, $\angle POT = 2\cdot 20 = 40^0$.
$\angle ABE = (100 - 40)/2 = 30^0$.
Ответ 30.

Пример 9. Определить неизвестный отрезок по рисунку.



Решение. $6x = 3\cdot 4$; $x = 2$
Ответ 2 **.**

Пример 10. Определить неизвестный отрезок по рисунку.



Решение. $4\cdot(8 + 4) = 6\cdot(6 + x)$; $48 = 36 + 6x$; $6x = 12$; $x = 2$.
Ответ 2.

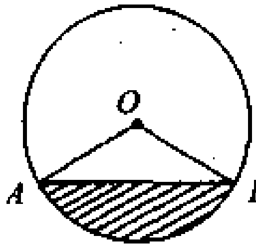
Пример 11. Укажите верные утверждения:

A. Через одну точку можно провести бесконечное число окружностей.
B. Через две точки можно провести бесконечное число окружностей.
C. Через три точки, не принадлежащие одной прямой можно провести единственную окружность.

1) все верные 2) только A 3) A и C 4) A и B

Ответ 1.

Пример 12. Если радиус круга AO равен 8, $\angle AOB = 135^0$, то площадь заштрихованной фигуры равна



1) $24\pi - 16\sqrt{3}$ 2) $24\pi - 16\sqrt{2}$ 3) $48\pi - 16\sqrt{3}$ 4) $48\pi - 16\sqrt{2}$

Решение. Площадь сегмента найдем как разность площади сектора и треугольника AOB: $S = S_c - S_{AOB}$.

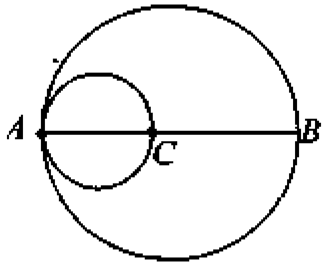
$$S_c = \frac{\pi 8^2}{360^0}\cdot 135^0 = \frac{\pi 8^2}{8}\cdot 3 = 24\pi$$

$$S_{AOB} = \frac{R^2}{2}\sin 135^0 = \frac{R^2}{2}\sin(180^0 - 135^0) = \frac{R^2}{2}\sin 45^0 = \frac{8^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 16\sqrt{2}$$

Итак, $S = 24\pi - 16\sqrt{2}$.

Ответ 2.

Пример 13. Точка С лежит на отрезке АВ, причем АС : СВ = 2 : 3. Если площадь круга с диаметром АС равна 25π см^2 , то длина окружности с диаметром АВ в см равна

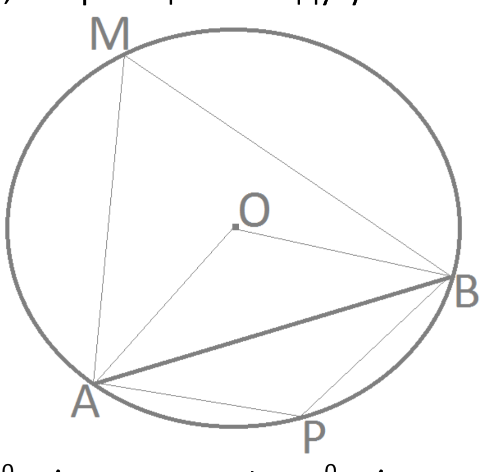


1) $12{,}5\pi$ 2) 20π 3) 25π 4) 50π

Решение. Пусть одна часть x см, тога АС = 2x = 2R см. Площадь круга, построенного на АС как на диаметре равна $S = \pi R^2 = 25\pi \Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = x = 5$ см. Тогда диаметр $AC = 2\cdot 5 = 10$ см, а весь отрезок АВ, который равен $AB = 5x = 25$ см, а его половина, равная радиусу окружности, построенной на АВ как на диаметре, равна $AB/2 = 12{,}5$ см. Тогда длина окружности с диаметром АВ: $C = 2\pi R = 25\pi$.

Ответ 3.

Пример 14. Хорда АВ стягивает дугу АВ с градусной мерой 143^0. Найти градусную меру большего из вписанных углов, опирающихся на дугу АВ.



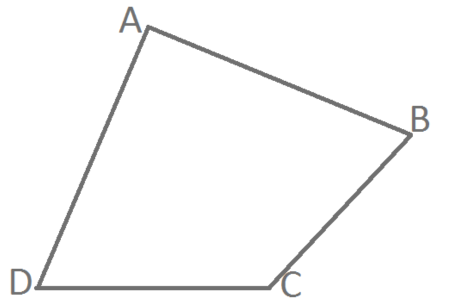
1) 143^0 2) $163^0 30'$ 3) $108^0 30'$ 4) 217^0

Решение. Большим из вписанных углов будет

$\angle APB = (360 - 143^0)/2 = 217/2 = 108{,}5^0 = 108^0 30'$.

Ответ 3.

Пример 15. Можно ли в четырехугольник *ABCD* со сторонами *AB=7* см, *BC=9* см, *CD=8* см, *AD=6* см вписать окружность?



Решение. Так как суммы противоположных сторон равны:

AB+CD=7+8=15 см,

BC+AD=9+6=15 см, то в него можно вписать окружность.

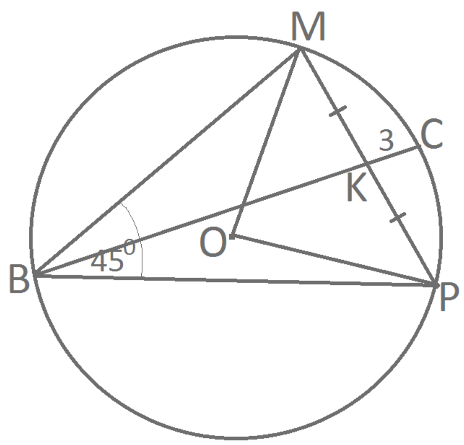
Ответ: вписать окружность можно.

Пример 16. Можно ли вокруг четырехугольник *ABCD* с углами $\angle A=30°$, $\angle B=170°$, $\angle C=75°$, $\angle D=85°$ описать окружность?

Решение. Так как суммы противоположных углов не равны:

$\angle A + \angle C=105°$, $\angle B + \angle D=255°$, $105° \neq 255° \neq 180^0$, то вокруг такого четырехугольника нельзя описать окружность.

Ответ: описать окружность нельзя.



Пример 17. Треугольник BMP с углом B, равным 45˚, вписан в окружность радиуса 6. Найдите длину медианы BK, если BK пересекает окружность в точке C и CK = 3.

Решение.

$\angle MOP = 2\,\angle MBP$

$\angle MOP = 2 \cdot 45° = 90°$, следовательно, Δ MOP – прямоугольный

$MP^2 = OM^2 + OP^2$

$MP^2 = 6^2 + 6^2 = 36 + 36 = 36 \cdot 2$

$MP = 6\sqrt{2}$

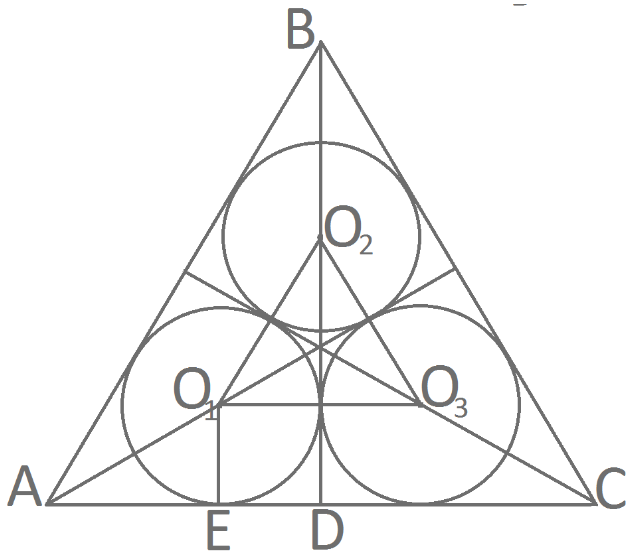
$MK = KP = 0{,}5MP = 3\sqrt{2}$

По свойству окружности: $MK \cdot KP = BK \cdot KC$

$3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} = BK \cdot 3$; $BK \cdot 3 = 9 \cdot 2$; $BK = 6$

Ответ: 6.

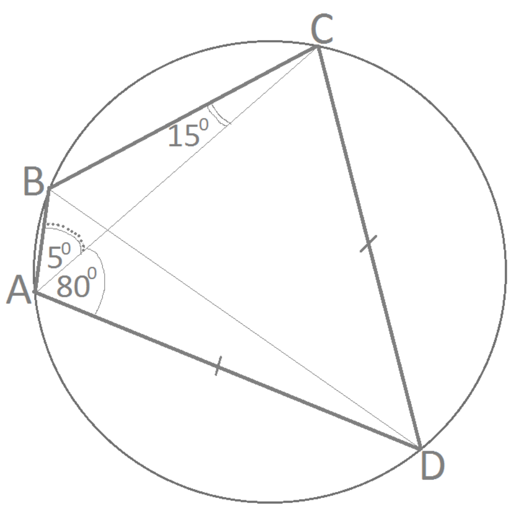
Пример 18. Внутри правильного треугольника со стороной *a* расположены три равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и двух других окружностей. Найти площадь части треугольника, расположенной вне этих окружностей.



Решение.
Пусть AB = BC = AC = a.
Обозначим $O_1E = O_1K = ED = r$,
тогда $AD = AE + ED = AE + r = \frac{a}{2}$.
AO_1 – биссектриса угла A, следовательно, $\angle O_1AE = 30^\circ$ и в прямоугольном ΔAO_1E имеем $AO_1 = 2O_1E = 2r$
и $AE = \sqrt{AO_1^2 - O_1E^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3}$.
Тогда $AE + r = r\sqrt{3} + r = a/2$, откуда $r = \frac{a(\sqrt{3} - 1)}{4}$.

Ответ: .

Пример 19. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* проведены диагонали *AC* и *BD*. Найти отношение $\angle BDC : \angle DBC$, если $\angle BAC = 5°$, $\angle ACB = 15°$, $AD = CD$ и $\angle DAC = 80°$.
Решение.

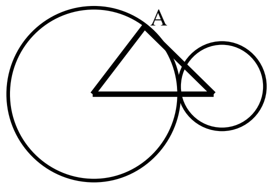


Из условия задачи следует, что треугольник *ADC* – равнобедренный, поэтому $\angle DCA = \angle DAC = 80°$.
Следовательно, $\angle BAD = 80 + 5 = 85°$, $\angle BCD = 80 + 15 = 95°$, $\angle BAD + \angle BCD = 85 + 95 = 180°$.
Тогда сумма углов *ABC* и *ADC* равна 360 – 180 = 180^o. Значит, вокруг четырехугольника *ABCD* можно описать окружность. Углы *BDC* и *BAC* вписаны в эту окружность и опира-

ются на одну и ту же дугу *BC*, следовательно, они равны, то есть $\angle BDC = \angle BAC = 5°$. Аналогично $\angle DBC = \angle DAC = 80°$, так как оба эти угла опираются на дугу *DC*. Отсюда $\angle BDC : \angle DBC = 5 : 80 = 1 : 16.$

Ответ: $\angle BDC : \angle DBC = 1 : 16.$

Пример 20. Две окружности касаются внешним образом. К первой из них проведена касательная, проходящая через центр второй окружности. Расстояние от точки касания до центра второй окружности равна утроенному радиусу этой окружности. Во сколько раз длина первой окружности больше длины второй окружности?



Решение. Пусть O_1 и O_2 – центры окружностей, *A* – точка касания (рис.).

Тогда $O_1A=R_1$, $O_1O_2 = R_1+R_2$, $O_2A=3\cdot R_2$ (по условию).

Требуется найти отношение $2\pi R_1 : 2\pi R_2 = R_1 : R_2$.

В прямоугольном треугольнике O_1AO_2 ($\angle A$ – прямой) имеем $O_1O_2^2 = O_1A^2 + O_2A^2$, или $(R_1 + R_2)^2 = R_1^2 + (3R_2)^2$. Упростив это равенство, получим $R_1 = 4R_2$, откуда $R_1 : R_2 = 4$.

Ответ: 4.