Тема № 21 «Трапеция. Многоугольники».

Трапеция — четырехугольник, у которого ровно одна пара противолежащих сторон параллельна.

Параллельные стороны называются *основаниями* трапеции.

Две другие стороны называются *боковыми сторонами*.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется *средней линией трапеции*.

Расстояние между основаниями называется *высотой* трапеции.

Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется *равнобокой* (*или равнобедренной*)

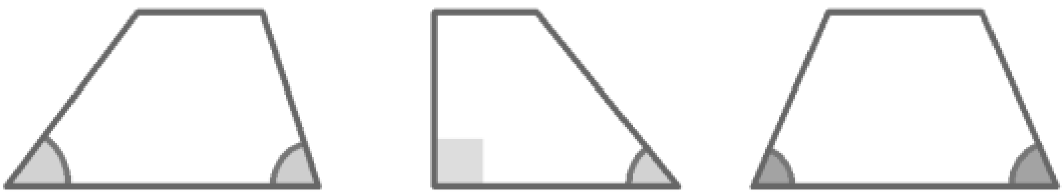
Трапеция, один из углов которой прямой, называется *прямоугольной*.

Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.

Свойства трапеции:

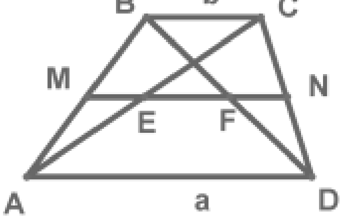
- в равнобокой трапеции углы при основании равны;
- в равнобокой трапеции диагонали равны;
- Средняя линия трапеции обладает свойством – она параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме.
- Если трапеция равнобокая, то около нее можно описать окружность.
- Если сумма оснований трапеции равна сумме боковых сторон, то в нее можно вписать окружность.
- В трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и продолжения боковых сторон находятся на одной прямой.

Виды трапеций.



Трапеция обычная   Трапеция прямоугольная   Трапеция равнобедренная

Линии параллельные основаниям

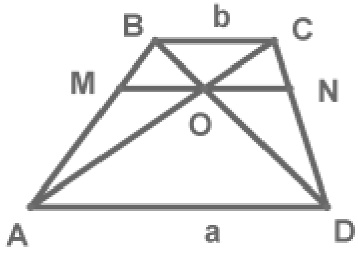


Средняя линия

$$MN = \frac{a+b}{2}; \quad FN = ME = \frac{b}{2}; \quad EN = MF = \frac{a}{2}; \quad EF = \frac{a-b}{2}$$

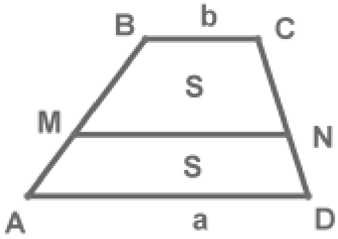
Линия, проходящая через точку пересечения диагоналей

$$OM = ON = x = \frac{ab}{a+b} \text{ или } \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$



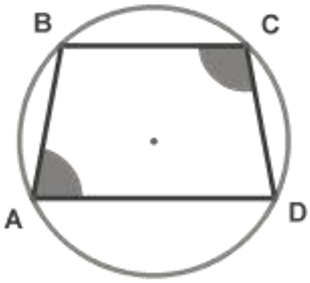
Линия, делящая площадь трапеции на равновеликие части

$$MN=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$



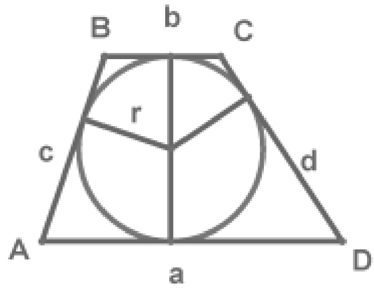
Трапеция, вписанная в окружность

$$\angle A+\angle C=180^\circ$$



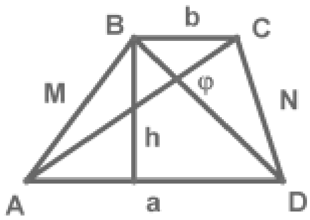
Трапеция, описанная около окружности

$$a+b=c+d$$



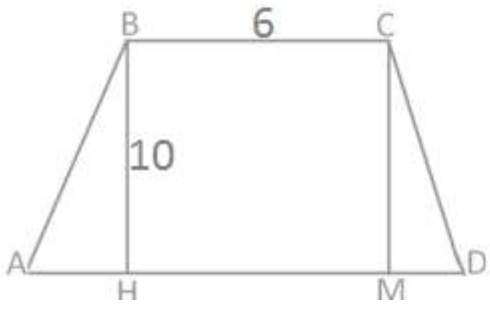
Площадь трапеции.

$$S=\frac{a+b}{2}h \qquad S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\varphi$$



Пример 1. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 6. Высота трапеции равна 10. Тангенс острого угла равен 2. Найдите большее основание.

Решение.



BC=6, BH=10, tgA = 2.

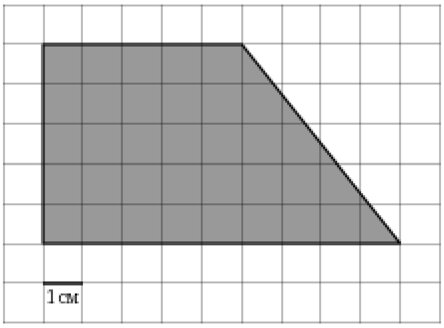
Выполним дополнительно построение: проведем вторую высоту CM.

Рассмотрим основание трапеции AD. Его длина складывается из длин отрезков: AD=AH+HM+MD. Обратим внимание, что так как трапеция равнобедренная, то ΔABH = ΔCMD (по гипотенузе и углу) $\Rightarrow$ AH= MD, кроме этого BC=HM.

Переходим к использованию данных задачи: AD=2x + 6, где x – длина отрезка AH. Так как tgA =2, то $tgA=\frac{BH}{x}=2$ (тангенсом острого угла прямоугольного треугольника на-

зывается отношение противолежащего катета к прилежащему катету). Следовательно, x = 10/2 = 5.
Окончательно получаем AD= 2x + 6 = 16.
Ответ: 16

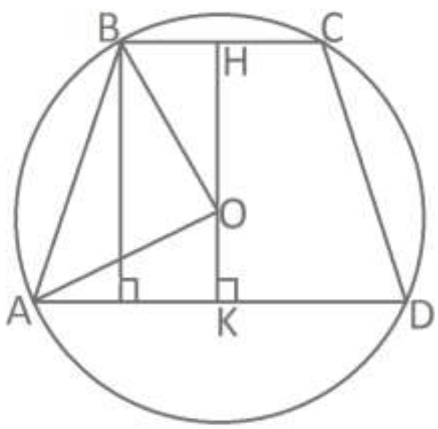
Пример 2. На клетчатой бумаге с клетками размером $1см \times 1см$ изображена трапеция. Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.



Решение. Обратимся к рисунку. Следует заметить, что площадь выделенной фигуры можно представить в виде сумме площадей квадрата (располагается слева) и прямоугольного треугольника (располагается справа).
Площадь квадрата S = a^2, где *a* – длина стороны квадрата. Площадь прямоугольного треугольника $S = \frac{1}{2}ab$, где *a* и *b* – катеты прямоугольного треугольника.

Переходим к вычислительной части решения задачи. $S = a^2 + \frac{1}{2}ab$. Исходя из рисунка *a=5 см*., *в=4 см*. Следовательно, $S = a^2 + \frac{1}{2}ab = 25 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 35$ см.
Ответ: 35.

Пример 3. В равнобедренной трапеции основания *21* и *9* сантиметров, высота – *8* сантиметров. Найти радиус описанной окружности.

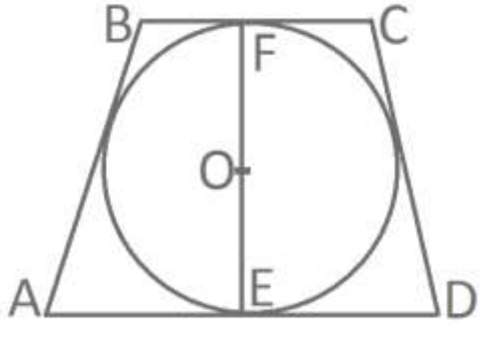


Решение.
Проведем серединный перпендикуляр к основаниям НК, тогда центр окружности О лежит на прямой НК.
АО = ОВ = R. Точка О делит отрезок НК на две части: пусть НО = x, тогда ОК = 8 – x.

$AO^2 = AK^2 + KO^2$; $OB^2 = BH^2 + HO^2$.
Так как $OA^2=OB^2$, получим: $AK^2 + KO^2 = BH^2 + HO^2$

$$\left(\frac{21}{2}\right)^2 + (8-x)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + x^2$$
$$\frac{441}{4} + 64 - 16x + x^2 = \frac{81}{4} + x^2$$
$$\frac{441}{4} + 64 - 16x + x^2 = \frac{81}{4} + x^2$$
$$\frac{441}{4} + 64 - 16x - \frac{81}{4} = 0$$
$$\frac{360}{4} + 64 - 16x = 0$$
$90 + 64 – 16x = 0$
$16x = 154$
$$x = \frac{154}{16} = \frac{77}{8}$$
$$HO = \frac{77}{8}$$
$OB^2 = BH^2 + HO^2$
$$OB^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{77}{8}\right)^2 = \frac{81}{4} + \frac{5929}{64} = \frac{1296 + 5929}{64} = \frac{7225}{64}$$
$$OB = \sqrt{\frac{7225}{64}} = \frac{85}{8} = 10{,}625$$
Ответ: R = 10,625.

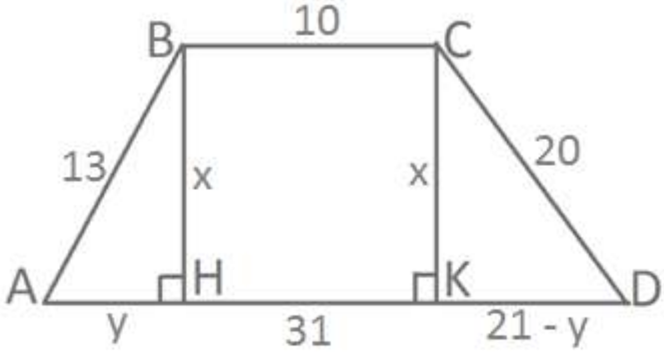
Пример 4. Найдите площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности с радиусом 4, если известно, что боковая сторона трапеции равна 10.
Решение.
Дано: ABCD – равнобедренная трапеция, r = 4, AB = 10
Найти: S_{ABCD}



1. AB = CD = 10 по условию
2. AB + CD = AD + BC по свойству вписанной окружности
3. AD + BC = 10 + 10 = 20
4. FE = 2r = 2 · 4 = 8
5. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot FE$, $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 8 = \frac{20}{2} \cdot 8 = 10 \cdot 8 = 80$

Ответ: $S_{ABCD} = 80.$

Пример 5. Основания трапеции равны 10 м и 31 м, а боковые стороны – 20 м и 13 м. Найдите высоту трапеции.



Решение.

Пусть HK = BC = 10 м, BH = CK = x, AH=y, тогда KD = 21 – y

По теореме Пифагора:

$x^2 + y^2 = 13^2$

$x^2 + (21 – y)^2 = 20^2$

$x^2 + y^2 = 169$ (1)

$x^2 + 441 – 42y + y^2 = 400$ (2)

Вычтем из (2) уравнения (1):

441 – 42y = 231

42y = 210

y = 5

AH = 5 м

По теореме Пифагора:

$BH^2 = AB^2 – AH^2$

$BH^2 = 13^2 – 5^2$

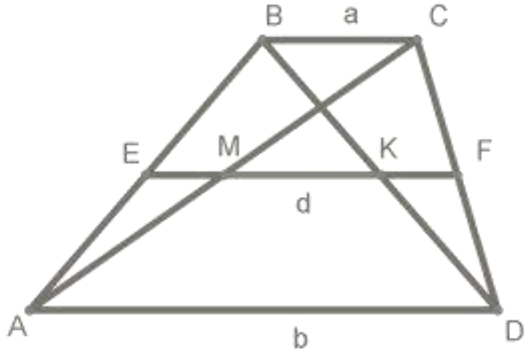
$BH^2 = 169 – 25$

$BH^2 = 144$

BH = 12

Ответ: BH = 12.

Пример 6. Большее основание трапеции равно 24. Найдите длину меньшего основания, если расстояние между серединами диагоналей равно 4.



Решение.

$$MF = \frac{b}{2}; \quad KF = \frac{a}{2}$$

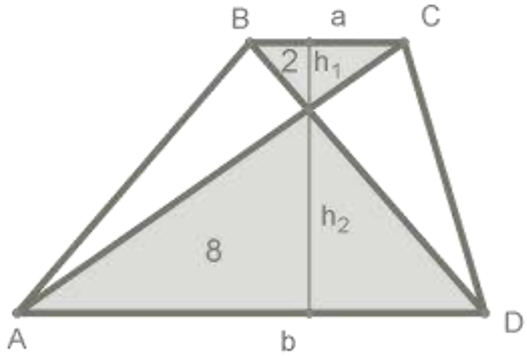
$$MK = MF - KF = \frac{b-a}{2}$$

$$\frac{b-a}{2} = 4 \Rightarrow b - a = 8;$$

$$a = b - 8 = 24 - 8 = 16$$

Ответ: 16.

Пример 7. Диагонали AC и BD трапеции ABCD пересекаются в точке O.
Найдите площадь трапеции, если BC < AD и площади треугольников BOC и ADO равны соответственно равны 2 и 8.
Анализ. Рассмотреть подобие треугольников.
Квадраты соответствующих сторон относятся как площади треугольников.
Введем параметры треугольников: стороны оснований и высоты треугольников.
Площади трапеции и треугольников определим по известным формулам.
Решение.



$$S = \frac{1}{2}(a+b)h = \frac{1}{2}(a+b)(h_1+h_2)$$

$$S = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}bh_2 + \frac{1}{2}ah_2 + \frac{1}{2}bh_1$$

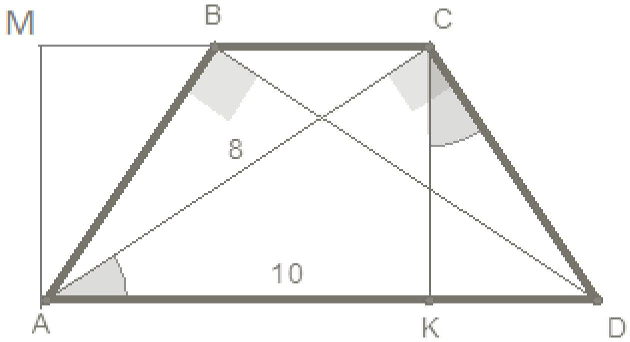
$$S = S_1 + S_2 + \frac{1}{2}ah_1\left(\frac{h_2}{h_1} + \frac{b}{a}\right)$$

$$\frac{b}{a} = \frac{h_2}{h_1} = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = 2;$$

$$S = 2+8+2(2+2) = 18$$

Ответ: 18.

Пример 8. В трапеции большее основание равно 10. Диагонали трапеции, равные 8, перпендикулярны боковым сторонам. Найдите площадь трапеции.



Анализ. Длины диагоналей равны и перпендикулярны боковым сторонам. Имеем равенство прямоугольных треугольников по катету и гипотенузе: ΔABD = ΔACD, поэтому трапеция равнобедренная, т.е. AB = CD.
Применим теорему Пифагора для определения боковой стороны трапеции.
Высоту трапеции определим из равенства площадей.
Проекцию боковой стороны на большее основание легче определить из подобия треугольников, чем по теореме Пифагора.
Длину средней линии в равнобокой трапеции можно определять как разность большего основания и проекции боковой стороны на основание.
Площадь трапеции находим как площадь прямоугольника AMCK, который получим, если достроим трапецию.

Решение.

$$CD = \sqrt{AD^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

$$CK = \frac{AC \cdot CD}{AD} = \frac{8 \cdot 6}{10} = 4,8$$

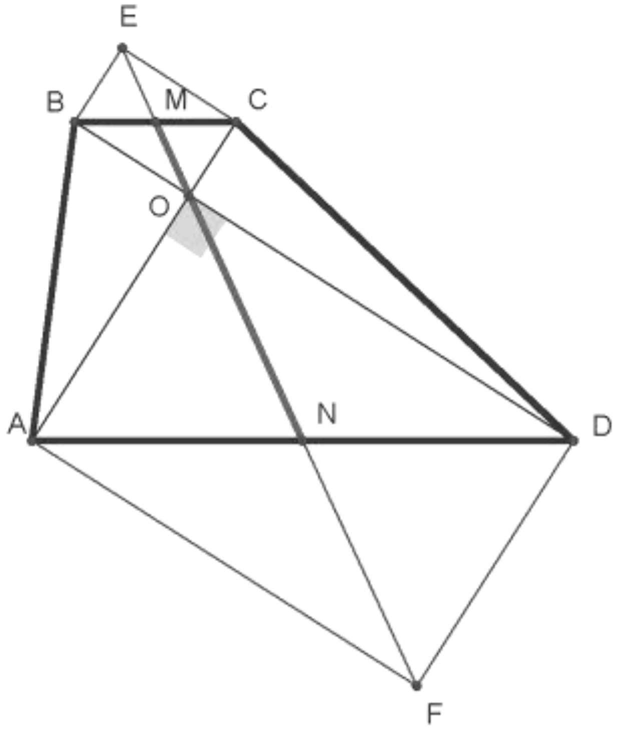
$$\triangle CDK \sim \triangle ACK;\ \frac{DK}{CD} = \frac{CD}{AD} \Rightarrow DK = \frac{6^2}{10} = 3,6$$

$$AK = AD - DK = 10 - 3,6 = 6,4$$

$$S = AK \cdot CK = 6,4 \cdot 4,8 = 30,72$$

Ответ: 30,72.

Пример 9. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а длина ее средней линии равна 9. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции.



Анализ. Задача решается построением.

Достроим прямоугольники и используем свойство прямоугольника: диагонали прямоугольника равны и в точке пересечения делятся пополам.

Длина средней линии равна полусумме длин оснований.

Длина отрезка, соединяющая середины оснований, равна полусумме длин диагоналей двух построенных треугольников.

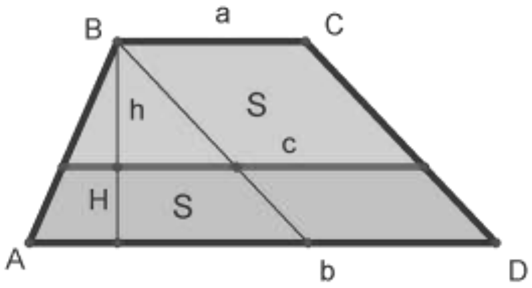
Решение.

$$BC = EO, AD = FO; \quad EF = EO + FO = BC + AD$$

$$MN = \frac{EF}{2} = \frac{BC + AD}{2} = 9$$

Ответ: 9.

Пример 10. Длины оснований трапеции равны 1 и 7. Найдите длину отрезка, параллельного основаниям и заключенного между боковыми сторонами, который делит трапецию на две равновеликие части.



Анализ. Провести из вершины тупого угла трапеции прямую линию, параллельную боковой стороне.
Рассмотреть отношение площадей трапеций.
Определить отношение при подобии треугольников.
Рациональные алгебраические преобразования приведут к результату.
Решение.

$$\frac{\frac{a+c}{2}h}{\frac{a+b}{2}H}=\frac{1}{2};\quad \frac{a+c}{a+b}=\frac{H}{2h}$$

$$\frac{H}{h}=\frac{b-a}{c-a};\qquad \frac{a+c}{a+b}=\frac{b-a}{2(c-a)}$$

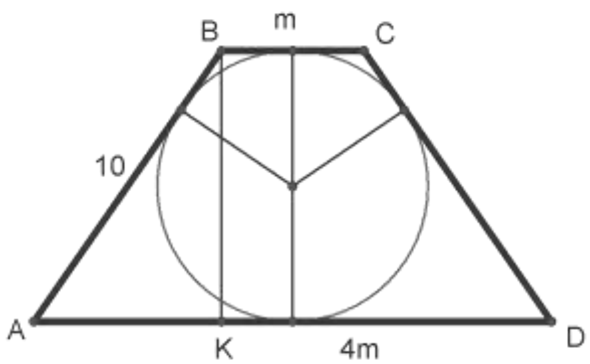
$$(c+a)(c-a)=\frac{(b-a)(b+a)}{2}$$

$$c^2-a^2=\frac{b^2-a^2}{2}\Rightarrow c^2=\frac{b^2+a^2}{2}$$

$$c=\sqrt{\frac{b^2+a^2}{2}}\qquad c=\sqrt{\frac{7^2+1^2}{2}}=5$$

Ответ: 5.

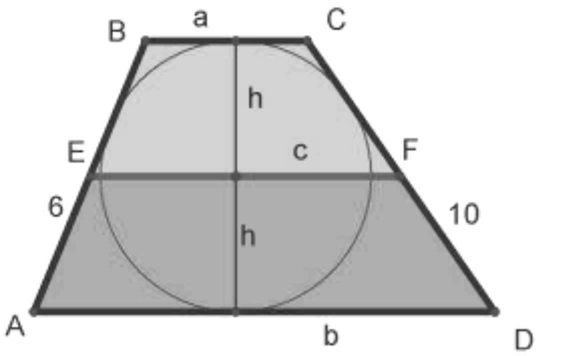
Пример 11. Равнобедренная трапеция ABCD описана около окружности. Боковая сторона трапеции равна 10, а основания относятся как 1: 4. Найдите площадь трапеции.



Анализ. Сумма противоположных сторон трапеции равна между собой – свойство описанного четырехугольника.
Трапеция равнобедренная.

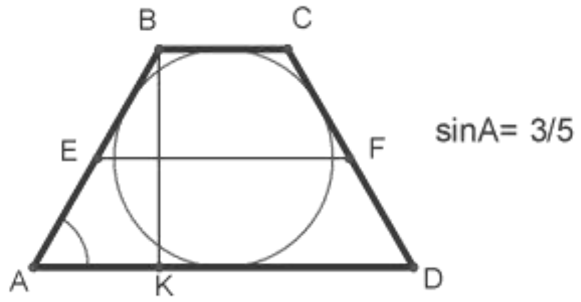
Боковая сторона равна длине средней линии.
Применяем теорему Пифагора для нахождения высоты трапеции.
Площадь трапеции определяем по доступной формуле.
Решение.
$m+4m=20; \quad m=4$
$$AK=\frac{AB-BC}{2}=\frac{3m}{2}=6$$
$$BK=\sqrt{AB^2-AK^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$$
$$S=\frac{AD+BC}{2}\cdot BK=\frac{5m}{2}\cdot 8=20m=20\cdot 4=80$$
Ответ: 80.

Пример 12. Длины боковых сторон трапеции равны 6 и 10. Известно, что в трапецию можно вписать окружность, а средняя линия делит ее на части, площади которых относятся как 5: 11. Найдите длину большего основания трапеции.



Анализ. Трапеция является описанной.
Сумма длин оснований равна сумме боковых сторон.
Средняя линия делит трапецию на две трапеции, высоты которых равны.
Задача сводится к системе уравнений.
Длина средней линии равна половине суммы длин боковых сторон.
Решение.
$$EF=c=\frac{a+b}{2}=\frac{AB+CD}{2}=\frac{6+10}{2}=8$$
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{5}{11}; \quad \frac{a+c}{b+c}=\frac{5}{11}; \quad \frac{a+8}{b+8}=\frac{5}{11}$$
$a=2c-b=16-b$
$$\frac{24-b}{b+8}=\frac{5}{11}; \quad 264-11b=5b+40; \quad 16b=224$$
$$b=14$$
Ответ: 14.

Пример 13. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности равна 15. Найдите среднюю линию трапеции, если косинус острого угла при ее основании равен 4/5.



Анализ. Трапеция равнобедренная.
Длина средней линии равна боковой стороне.
Площадь трапеции определяется произведением средней линии на высоту трапеции.
Опустим высоту трапеции из тупого угла. Через заданный косинус угла определим синус угла. По синусу угла выразим высоту трапеции через боковую сторону.

Решение.

$S = EF \cdot BK; \quad EF = AB = m$

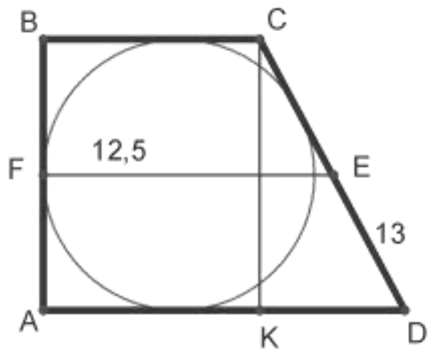
$\cos A = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin A = \frac{3}{5}$

$BK = AB \cdot \sin A = \frac{3m}{5}$

$\frac{3m^2}{5} = 15 \Rightarrow m = 5$

Ответ: 5.

Пример 14. В прямоугольной трапеции, описанной около окружности, большая боковая сторона равна 13, а средняя линия равна 12,5. Найдите меньшее основание трапеции.



Анализ. Необходимо использовать свойство сторон четырехугольника, описанной около окружности: сумма длин противоположных сторон равна между собой.
Кроме того, длина средней линии равна полусумме длин сторон оснований.
Проведем из вершины тупого угла высоту трапеции.
Воспользуемся теоремой Пифагора и определим проекцию наклонной боковой стороны на основание.

Решение.

$CD = 13$

$AD + BC = 2 \cdot 12,5 = 25;$

$AB + CD = AD + BC = 25$

$AB = 25 - CD = 25 - 13 = 12$

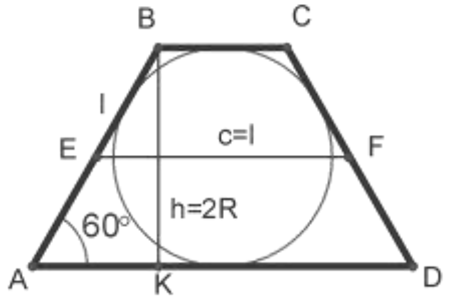
$CK = h = AB = 12$

$DK = \sqrt{CD^2 - CK^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$

$2BC + DK = 25 \Rightarrow BC = \frac{1}{2}(25 - 5) = 10$

Ответ: 10.

Пример 15. В равнобедренную трапецию, один из углов которой равен 60°, а площадь равна $24\sqrt{3}$, вписана окружность. Найдите радиус этой окружности.



Анализ. Важное положение, что трапеция является равнобедренной и имеет ось симметрии. Тогда длина боковой стороны равна длине средней линии.
Введем параметр боковой стороны, из прямоугольного треугольника по заданному углу определим высоту трапеции, которая является диаметром вписанной окружности. Площадь трапеции определяется как произведение средней линии на высоту трапеции.

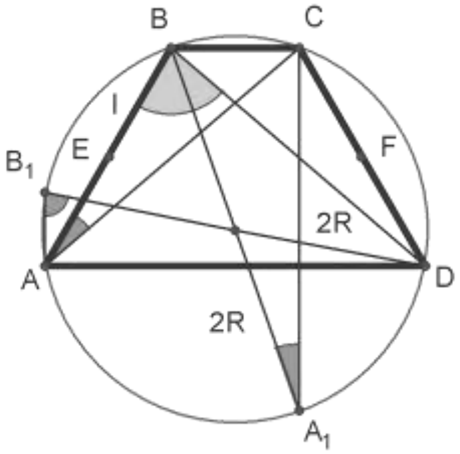
Решение.

$S = \frac{a+b}{2}h = l \cdot h = \frac{h^2}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3} \cdot h^2}{3} = \frac{8\sqrt{3}R^2}{3}$

$\frac{8\sqrt{3}R^2}{3} = 24\sqrt{3} \Rightarrow R^2 = 9; \quad R = 3$

Ответ: 3

Пример 16. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если ее большее основание AD равно 15, синус угла BAC равен $\frac{1}{3}$, синус угла ABD равен $\frac{5}{9}$.



Анализ. Трапецию можно вписать в окружность, если она равнобедренная.
Длина любой хорды определяется из теоремы синусов.

Решение.

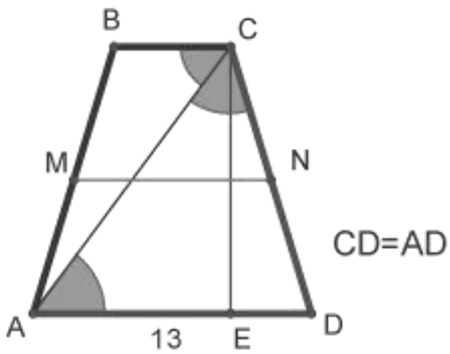
$$AD = 2R\sin\angle ABD \Rightarrow 2R = \frac{AD}{\sin\angle ABD} = \frac{15}{\frac{5}{9}} = 27$$

$$BC = 2R\sin\angle BAC = 27\cdot\frac{1}{3} = 9$$

$$l = \frac{AD+BC}{2} = \frac{15+9}{2} = 12$$

Ответ: 12.

Пример 17. Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой большее основание равно 13, средняя линия равна 8, а биссектриса тупого угла является диагональю трапеции.



Анализ. При проведении биссектрисы тупого угла боковая сторона равна большему основанию трапеции. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции равна полуразности длин оснований. По теореме Пифагора найдем высоту трапеции. Площадь трапеции находим по формуле.

Решение.

$BC = 2MN - AD = 2 \cdot 8 - 13 = 3$

$CD = AD = 13$

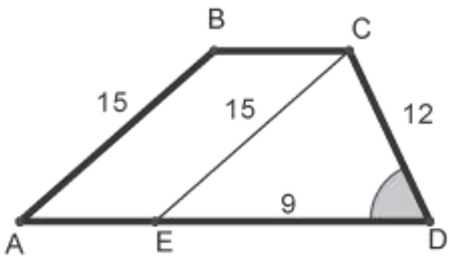
$DE = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{13-3}{2} = 5$

$CE = \sqrt{CD^2 - DE^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

$S = MN \cdot CE = 8 \cdot 12 = 96$

Ответ: 96.

Пример 18. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны 15 и 12 соответственно. Найдите градусную величину угла D, если одно из оснований трапеции на 9 больше другого.



Анализ. Из вершины угла C проведем прямую линию, параллельную стороне AB. Трапеция разделена данной прямой линией на параллелограмм и треугольник. Противоположные стороны параллелограмма равны, значит, длина стороны треугольника равна разности длин оснований трапеции.
Данный треугольник определен по трем сторонам.
По теореме косинусов определим искомый угол.
Вычисления показывают, что боковая сторона перпендикулярна к основанию, искомый угол прямой.

Решение.

$CE^2 = CD^2 + DE^2 - 2CD \cdot DE \cdot \cos D$

$\cos D = \dfrac{12^2 + 9^2 - 15^2}{2 \cdot 12 \cdot 9} = 0$

$\angle D = 90^\circ$

Ответ: 90.

Многоугольники

Выпуклый ***многоугольник*** называется ***правильным,*** если у него все стороны равны и все углы равны.

Центром правильного многоугольника называется точка, равноудаленная от всех его вершин и всех его сторон.

Центральным углом правильного многоугольника называется угол, под которым видна сторона из его центра.

Объединение замкнутой ломаной и ее внутренней области называют *многоугольником*.

Саму ломаную называют *границей многоугольника*, а ее внутреннюю область - *внутренней областью многоугольника*.

Звенья границы многоугольника называются *сторонами многоугольника*, а вершины - *вершинами многоугольника*.

Отрезок, соединяющий две не соседние вершины многоугольника, называют его *диагональю*.

Многоугольник называют *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону.

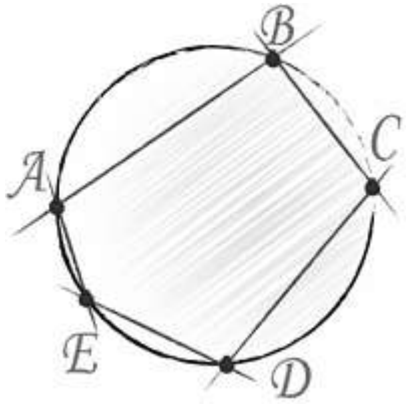
Соотношения в многоугольниках:

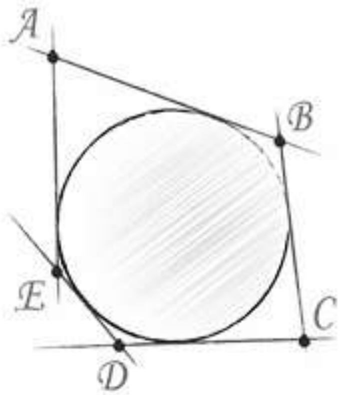
- все правильные многоугольники подобны друг другу;
- сумма углов любого выпуклого многоугольника равна $180^{\circ}(n\text{-}2)$;
- сумма внешних углов любого выпуклого многоугольника, взятых по одному у каждой вершины, равна 360°.
- периметры подобных многоугольников относятся, как их *сходственные* стороны, и это отношение равно коэффициенту подобия;
- площади подобных многоугольников относятся, как квадраты их сходственных сторон, и это отношение равно квадрату коэффициента подобия

Вписанные и описанные многоугольники

Вписанным в круг ***многоугольником*** называется такой многоугольник, вершины которого лежат на окружности. ***Описанным около круга многоугольником*** называется такой многоугольник, стороны которого касаются окружности.

Описанной около многоугольника окружностью называется окружность, проходящая через его вершины. ***Вписанной в многоугольник окружностью*** называется окружность, касающаяся его сторон.





Вписанный многоугольник Описанный многоугольник

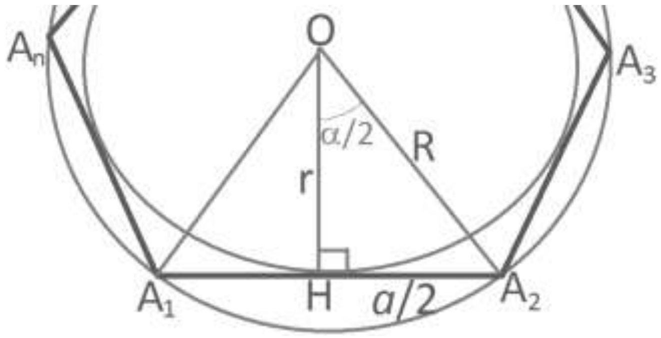
Описанный многоугольник:

Если p - полупериметр; r - радиус вписанной окружности, то $S = p \cdot r$

Если многоугольник правильный, то $S = \dfrac{n \cdot a_n \cdot r}{2}$

Правильный многоугольник

(a_n - сторона правильного n - угольника; R - радиус описанной окружности; r - радиус вписанной окружности, n – число сторон (углов) многоугольника):



$$\triangle OHA_2: \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a_n}{2R}; \quad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a_n}{2r};$$

$$\alpha = \frac{360^0}{n}$$

$$a_n = 2R \cdot \sin\frac{180^0}{n} = 2r \cdot tg\frac{180^0}{n}$$

$$n = 3 \quad a_3 = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$$

$$n = 4 \quad a_4 = R\sqrt{2} = 2r$$

$$n = 6 \quad a_6 = R = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$$

Угол $\angle A_1A_2A_3$ правильного многоугольника равен $\frac{180^0(n-2)}{n}$

Сумма внутренних углов ***любого*** многоугольника равна $180^0(n – 2)$.

Сумма внешних углов ***любого*** многоугольника равна 360^0.

Число диагоналей выпуклого многоугольника $\frac{n(n-3)}{2}$

Пример 19. Выберите верные утверждения:

A. Если у правильного многоугольника равны между собой внутренний, внешний и центральный углы, то этот многоугольник – квадрат.
B. Если у правильного многоугольника внутренний угол в 10 раз больше центрального, то это 22-угольник.
C. Если многоугольник правильный, то наибольший центральный угол у него может быть 120^0.

1) верны все 2) только A 3) B, C 4) A, C

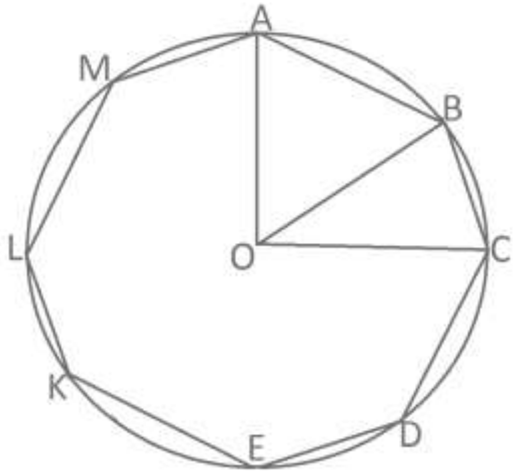
Решение. Рассмотрим каждое утверждение в отдельности.

A. Верно, так как у квадрата внутренний, внешний и центральный углы по 90^0.
B. Верно. Докажем это. Пусть у нас x-угольник, тогда центральный его угол равен $360^0/x$, а внутренний угол равен $180^0(x – 2)/x$.
По условию $180^0(x – 2)/x = 10\cdot360^0/x \Rightarrow x – 2 = 20 \Rightarrow x = 22$.
C. Верно. Минимальное число сторон – это n = 3, тогда центральный угол угла правильного многоугольника равен $360^0 : 3 = 120^0$. При увеличении n, величина центрального угла будет уменьшаться, поэтому 120^0 – это наибольший.

Из представленных утверждений верны все, т.е. правильный ответ 1).

Ответ 1.

Пример 20. Вся дуга окружности радиуса R разделена на 4 большие и 4 малые части, которые чередуются одна за другой. Большая часть в два раза длиннее малой. Определить площадь восьмиугольника, вершинами которого являются точки деления дуги окружности.



Решение.
Пусть $\angle AOB = 2x$, $\angle BOC = x$,
тогда по условию $8x + 4x = 360°$, $x = 30°$, $2x = 60°$, $\angle AOB = 60°$, $\angle BOC = 30°$

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} R^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{R^2}{4}$$

$$S_{ABCDEKLM} = 4S_{\Delta AOB} + 4S_{\Delta BOS} = 4 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + 4 \cdot \frac{R^2}{4} = R^2\sqrt{3} + R^2 = R^2(\sqrt{3} + 1)$$

Ответ: $R^2(\sqrt{3} + 1)$.

Пример 21. В окружность вписаны правильный шестиугольник и квадрат. Сторона шестиугольника равна p. Найти периметр квадрата.

Решение. Радиус окружности, описанной около шестиугольника равен его стороне, так как $a_6 = 2R \cdot \sin\frac{180^0}{6} = 2R \cdot \frac{1}{2} = R$, тогда сторона квадрата:

$a_4 = 2R \cdot \sin\frac{180^0}{4} = 2R \cdot \sin 45^0 = 2R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2} = p\sqrt{2}$, а периметр квадрата $4p\sqrt{2}$.

Ответ $4p\sqrt{2}$.