Тема № 20 «Четырехугольник. Параллелограмм. Прямоугольник. Ромб. Квадрат»

Четырехугольником называется фигура, которая состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков. При этом никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться.

Вершины четырехугольника называются *соседними*, если они являются концами одной из его сторон.

Вершины, не являющиеся соседними, называются *противоположными*.

Отрезки, соединяющие противолежащие вершины четырехугольника, называются *диагоналями*.

Стороны четырехугольника, исходящие из одной вершины, называются *соседними сторонами*.

Стороны, не имеющие общего конца, называются *противолежащими сторонами*.

Четырехугольник называется *выпуклым*, если он расположен в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей любую его сторону

Виды четырехугольников

Параллелограмм — четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны

Прямоугольник — параллелограмм, у которого все углы прямые

Ромб— параллелограмм, у которого все стороны равны

Квадрат — прямоугольник, у которого все стороны равны

Трапеция — четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны

Дельтоид — четырехугольник, у которого две пары смежных сторон равны

Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется *квадратом*.

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Признаки (свойства) параллелограмма:

- противоположные стороны равны;
- противоположные углы равны;
- диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам;
- сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон;
- если в выпуклом четырехугольнике противоположные стороны равны, то такой четырехугольник – параллелограмм;
- если в выпуклом четырехугольнике противоположные углы равны, то такой четырехугольник – параллелограмм;
- если в выпуклом четырехугольнике диагонали делятся точкой пересечения пополам, то такой четырехугольник – параллелограмм;
- середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Параллелограмм, все стороны которого равны, называется ***ромбом.***

Свойства ромба

- все свойства параллелограмма
- противолежащие стороны равны;
- противоположные углы равны;
- диагонали точкой пересечения делятся пополам;
- сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°;
- сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон;
- диагонали перпендикулярны;
- диагонали являются биссектрисами его углов.

Признаки ромба

- Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то параллелограмм - ромб.
- Если диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла, то параллелограмм - ромб.

Параллелограмм, все углы которого прямые, называется ***прямоугольником.***

Дополнительные свойства и признаки прямоугольника:

- диагонали прямоугольника равны;
- если диагонали параллелограмма равны, то такой параллелограмм – прямоугольник;
- середины сторон прямоугольника – вершины ромба;
- середины сторон ромба – вершины прямоугольника.

Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется ***квадратом.***

Свойства и признаки квадрата (необходимые и достаточные условия того, что четырехугольник - квадрат).

Если четырехугольник - квадрат, то для него справедливы все следующие утверждения.

Если для четырехугольника справедливо хотя бы одно из следующих утверждений, то он - квадрат.

Все стороны равны и среди внутренних углов есть прямой угол.

Диагонали равны, перпендикулярны и, пересекаясь, делятся пополам.

Квадрат имеет 4 оси симметрии: прямые, перпендикулярные сторонам и проходящие через их середины; прямые, содержащие диагонали.

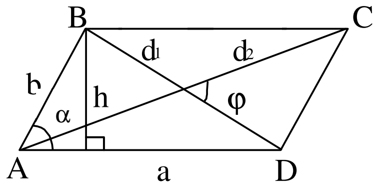
Основные формулы

Произвольный выпуклый четырехугольник:

d_1, d_2 - диагонали; φ - угол между ними; S - площадь.

$$S=\frac{1}{2}\cdot d_1\cdot d_2\cdot\sin\varphi$$

Параллелограмм

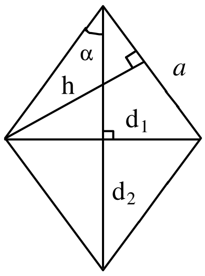


$$d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$$

$$S=a\cdot h_a=a\cdot b\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot d_1\cdot d_2\cdot\sin\varphi$$

a, b - смежные стороны; α - угол между ними; h_a - высота, проведенная к стороне *a*; S - площадь.

Ромб



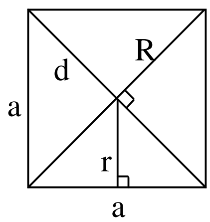
$$d_1^2+d_2^2=4a^2$$

$$S=a\cdot h_a=a^2\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot d_1\cdot d_2$$

Прямоугольник:

$$S=a\cdot b=\frac{1}{2}\cdot d_1\cdot d_2\cdot\sin\varphi$$

Квадрат



$$d=a\sqrt{2}$$
$$a=R\sqrt{2}=2r$$
$$R=\frac{1}{2}d=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$S=a^2=\frac{1}{2}\cdot d^2$$

Пример 1. В параллелограмме один из углов равен 41^0. Найти сумму остальных углов.

Решение.

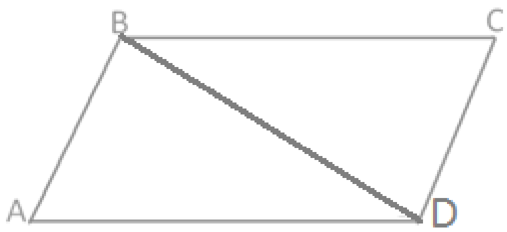
1-й способ. По свойству параллелограмма сумма углов, прилежащих к одной стороне равна 180^0, поэтому $\angle B = 180 - 41 = 139^0$. Так как противоположные углы в параллелограмме равны, имеем $\angle A = \angle C = 41^0$, $\angle B = \angle D = 139^0$, тогда сумма углов, кроме угла А равна $2 \cdot 139 + 41 = 319^0$.

2-й способ. Сумма углов параллелограмма 360^0, поэтому сумма углов кроме угла А равна $360 - 41 = 319^0$.

Ответ 319.

Пример 2. Стороны параллелограмма 10 и 24, а одна из диагоналей 26. Найти длину другой диагонали.

Решение.

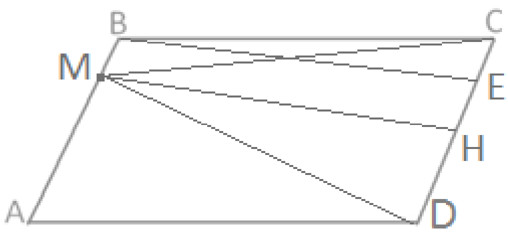


Найдем cosA по теореме косинусов: $\cos A = (AB^2 + AD^2 - BD^2)/2AB \cdot AD$,
$\cos A = (10^2 + 24^2 - 26^2)/2 \cdot 10 \cdot 24 = 0$. Значит, $\angle A = 90^0$, ABCD – прямоугольник, в котором диагонали равны. Следовательно, длина второй диагонали тоже 26.

Ответ 26.

Пример 3. На стороне AB параллелограмма ABCD отметили точку M. Найти площадь параллелограмма, если площадь треугольника MCD равна 38 см^2.

Решение.



Площадь треугольника MCD выражается по формуле $S_{MCD} = CD \cdot MH/2 = 38 \Rightarrow CD \cdot MH = 76$, где MH – высота треугольника. Заметим, что MH = BE, то есть высота данного треугольника равна высоте параллелограмма, опущенной на сторону CD, как расстояние между параллельными сторонами AB и CD.

Площадь параллелограмма равна $S = CD \cdot MH = 76$ см^2.

Ответ 76.

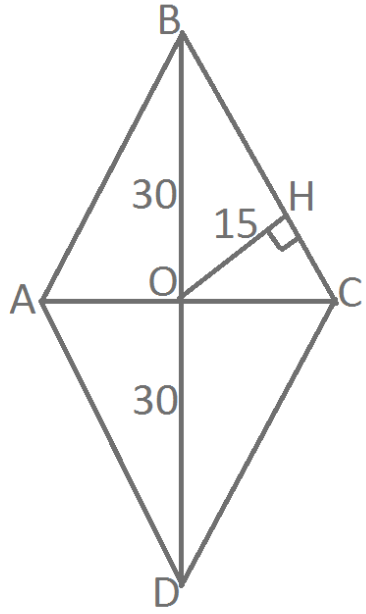
Пример 4. В параллелограмме ABCD sinA = 0,8. Найдите cosB.

Решение.

$\angle B = 180° - \angle A \Rightarrow \sin B = \sin(180° - A) = \sin A$
$\cos B = \cos(180° - A) = -\cos A$

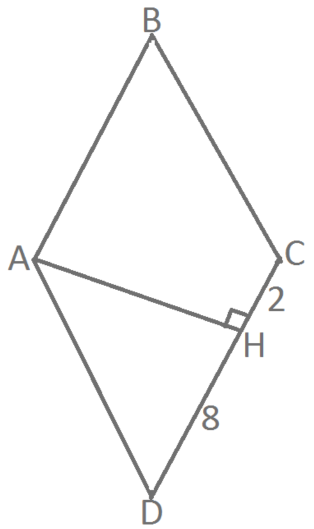
Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, тогда $\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \sqrt{1 - 0{,}8^2} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$ (если угол B - острый) и $\cos B = -\sqrt{1 - \sin^2 B} = -\sqrt{1 - 0{,}8^2} = -\sqrt{0{,}36} = -0{,}6$ (если угол B - тупой). Для рассматриваемой задачи нужно выбрать второй случай.
Ответ: -0,6.

Пример 5. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 15 см, а одна из диагоналей ромба равна 60 см. Найти углы ромба.
Решение.



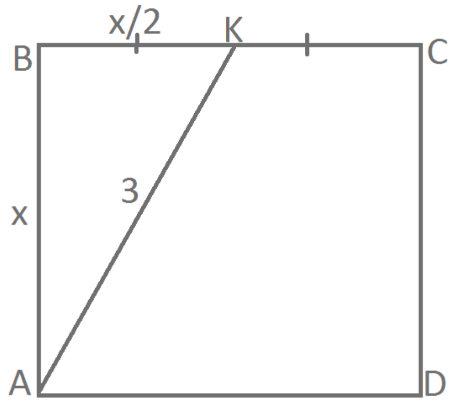
Пусть диагональ BD = 60, тогда OB = OD = 30, так как диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам.
В прямоугольном треугольнике BOC найдем $\sin\angle OBC = OH/OB = 15/30 = 0{,}5$, тогда $\angle OBC = 30^0$.
Так как диагонали ромба являются биссектрисами углов, то $\angle ABC = 2\angle OBC = 60^0$.
Так как сумма углов, прилежащих к одной стороне равна 180^0, то $\angle DAB = 180 - 60 = 120^0$. А так как противоположные углы ромба равны, то $\angle DCB = \angle DAB = 120^0$, $\angle ABC = \angle ADC = 60^0$.
Ответ 60, 60, 120, 120.

Пример 6. Высота AH ромба ABCD делит сторону CD на отрезки DH = 8 и CH = 2. Найти высоту ромба.



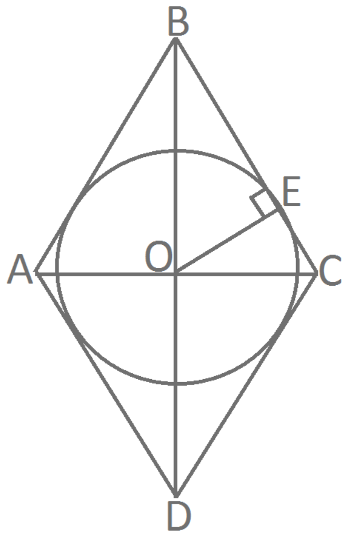
Решение.
Так как сторона ромба равны, то AD = CD = 12 + 8 = 10.
В прямоугольном треугольнике AHD по теореме Пифагора найдем
 $AH = \sqrt{(AD^2 - HD^2)} = \sqrt{(10^2 - 8^2)} = 6$.
Ответ 6.

Пример 7. Расстояние от вершины квадрата до середины стороны, не содержащей эту вершину, равно 3 см. Найти площадь квадрата.
Решение.



Пусть сторона квадрата AB = x, тогда BK = x/2.
В прямоугольном треугольнике ABK, используя теорему Пифагора, получим уравнение $x^2 + (x/2)^2 = 3^2$; $5x^2/4 = 9$; $x^2 = 36/5 = 7{,}2$.
Заметим, что площадь квадрата – это и есть $x^2 = 7{,}2$.
Ответ 7,2.

Пример 8. В ромб вписана окружность радиуса *R*. Найти площадь ромба, если его большая диагональ в *4* раза больше радиуса вписанной окружности.



Решение.

Дано: ромб, радиус вписанной окружности OE = R, BD = 4R.

Найти: S_{ABcD}

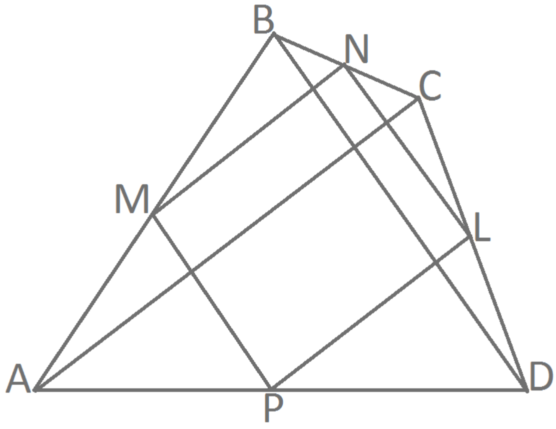
$$BC = BE + EC = R\sqrt{3} + \frac{R\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{3}R\sqrt{3}$$

$$S_{ABCD} = BC \cdot 2OE = \frac{4}{3}R\sqrt{3} \cdot 2R = \frac{8R^2\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: .

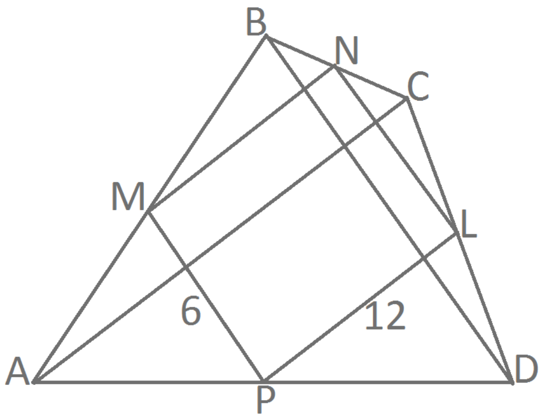
Теорема Вариньона. *Середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма, периметр которого равен сумме длин диагоналей данного четырехугольника, а площадь параллелограмма Вариньона равна половине площади четырехугольника.*

Пример 9. В выпуклом четырехугольнике ABCD диагонали AC = 12 и BD = 10. Найти периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника.



Решение. Пусть точки M, N, L, P– середины сторон AB, BC, CD и DA четырехугольника ABCD соответственно, тогда MN и PL - средние линии треугольников ABC и ADC. По свойству средней линии MN|| AC ||PL и MN = 0,5AC, PL = 0,5 AC, следовательно, MN = PL. Отсюда следует, что MNLP – параллелограмм.
Аналогично, NL = NP = 0,5BD. Следовательно, периметр параллелограмма MNLP:
P = 2(MN + MP) = AC + BD = 22.
Ответ 22.

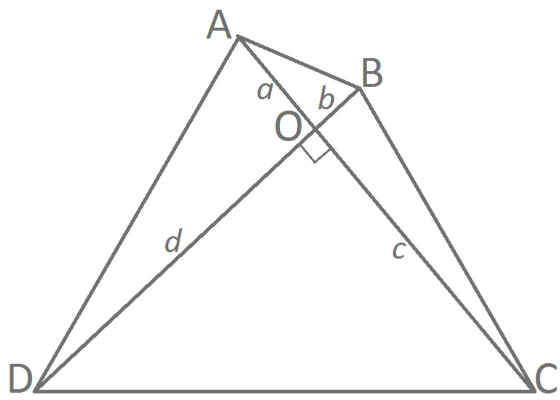
Пример 10. Расстояния от середины стороны AD выпуклого четырехугольника ABCD до середин сторон AB и CD равны соответственно 6 и 12. Найти длины диагоналей четырехугольника ABCD.
Решение.



Пусть точки M, L, P– середины сторон AB, CD и DA четырехугольника ABCD соответственно, тогда MP и PL - средние линии треугольников ABD и ADC. По свойству средней линии MP|| BD, PL || AC и MP = 0,5BD $\Rightarrow$ BD = 2MP = 12; PL = 0,5AC $\Rightarrow$ AC = 2PL = 24.
Ответ 12, 24.

Теорема. *Если диагонали выпуклого четырехугольника перпендикулярны, то суммы квадратов противоположных сторон равны. (Верно и обратное).*

Пример 11. В выпуклом четырехугольнике ABCD AB= 3, BC = 4, CD= 5, а диагонали AC и BD перпендикулярны. Найти AD.



Решение. Пусть диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Обозначим OA = *a*, OB = b, OC = c, OD = d. Поскольку диагонали AC и BD перпендикулярны, то треугольники OAB, OBC, OCD, ODA прямоугольные, а стороны четырехугольника ABCD являются их гипотенузами. Поэтому, по теореме Пифагора получаем равенства

$AB^2 = a^2 + b^2$; $BC^2 = b^2 + c^2$; $CD^2 = c^2 + d^2$; $DA^2 = d^2 + a^2$.

Отсюда следует, что

$AB^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$;

$BC^2 + DA^2 = b^2 + c^2 + d^2 + a^2$.

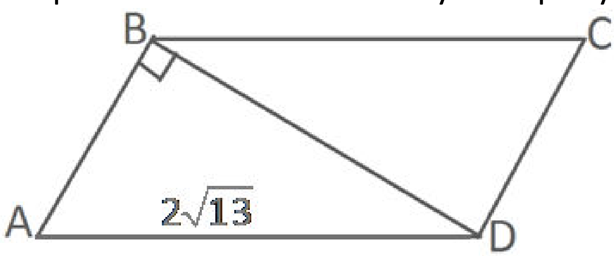
Правые части равны, значит, равны и левые:

$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3^2 + 5^2 = 4^2 + DA^2 \quad \Rightarrow \quad DA^2 = 3^2 + 5^2 - 4^2 = 18$,

тогда $AD = 3\sqrt{2}$.

Ответ $3\sqrt{2}$.

Пример 12. Большая сторона параллелограмма ABCD равна $2\sqrt{13}$, а отношение углов, прилежащих к одной стороне, равно 5. Меньшая диагональ параллелограмма перпендикулярна меньшей стороне. Вычислить меньшую сторону и обе диагонали.



Решение. Пусть в параллелограмме ABCD сторона $AD = 2\sqrt{13}$, $AB \perp BD$ и $\angle A = \alpha$. Тогда $\angle B = 5\alpha$ и по свойству углов параллелограмма $\angle A + \angle B = \alpha + 5\alpha = 180^0$.

$6\alpha = 180^0$; $\alpha = 30^0$, тогда $BD = 0{,}5\,AD = \sqrt{13}$.

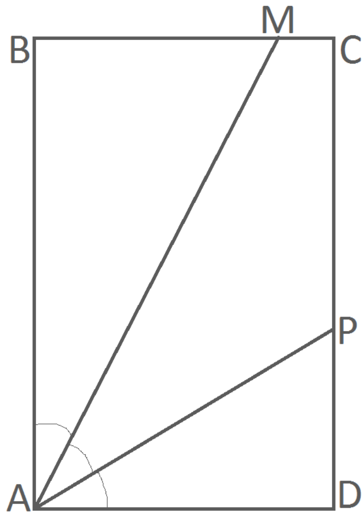
Теперь по теореме Пифагора $AB = \sqrt{(AD^2 - BD^2)} = \sqrt{(4 \cdot 13 - 13)} = \sqrt{39}$.

Вторую диагональ найдем по свойству сторон и диагоналей параллелограмма

$2(AB^2 + AD^2) = AC^2 + BD^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2(39 + 52) = AC^2 + 13 \quad \Leftrightarrow \quad AC = 13$.

Ответ $AB = \sqrt{39}$, $BD = \sqrt{13}$, $AC = 13$.

Пример 13. Два луча, исходящие из вершины прямоугольника и делящие его угол на три равные части, разделили прямоугольник на три равновеликие части. Определить отношение сторон прямоугольника.

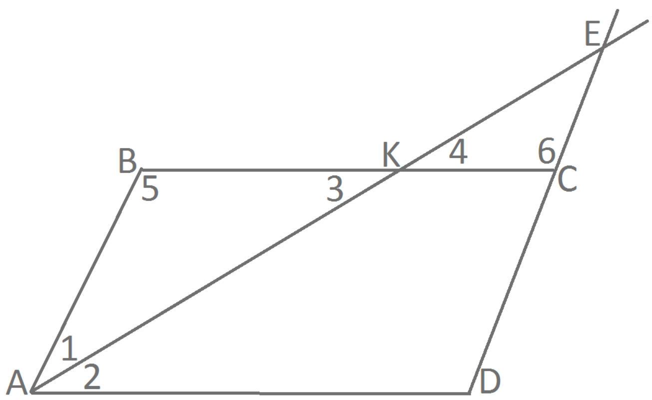


Решение. Пусть в прямоугольнике ABCD AB = *a*, AD = b. Пусть лучи AM и AP делят прямой угол на равные части и точки P и M лежат на сторонах прямоугольника ABCD. Пусть точка P лежит на стороне DC. Тогда точка M должна лежать на стороне BC.

Действительно, если бы точка M лежала на стороне DC, то треугольники ADP и PDM не могли бы быть равновеликими, поскольку у этих треугольников была бы общая высота и различные основания, так как DP $\neq$ PM.

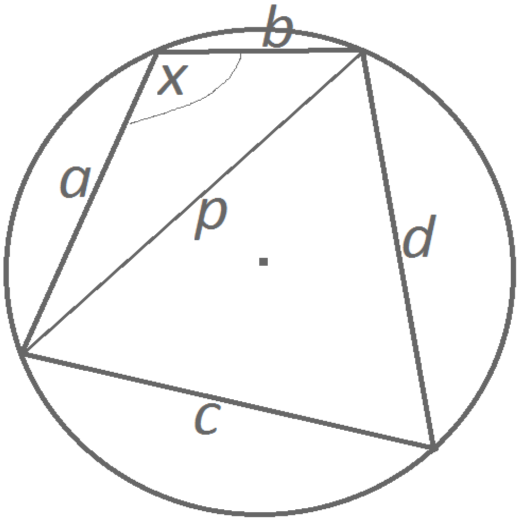
Из прямоугольного треугольника ADP находим DP = ADtg$\angle$DAP = btg30 = b/$\sqrt{3}$.
По условию площадь прямоугольника ABCD в 3 раза больше площади треугольника ADP. Отсюда получаем равенство AB$\cdot$AD = 3$\cdot$0,5AD$\cdot$PD $\Leftrightarrow$ $a = 1{,}5b/\sqrt{3} \Leftrightarrow a = b\sqrt{3}/2$.
Отсюда отношение a : b = $\sqrt{3}/2$.
Ответ $\sqrt{3}/2$.

Пример 14. В параллелограмме ABCD длина отрезка AB равна 4. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K, а продолжение стороны CD в точке E. Найти длину отрезка KC, если EC = 1.



Решение. 1) $\angle 1 = \angle 2$, так как AK – биссектриса угла A. 2) $\angle 3 = \angle 2$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK. Из 1) и 2) следует, $\angle 3 = \angle 1$. Значит, ΔABK равнобедренный, BK = AB = 4.
3) $\Delta ABK \sim \Delta ECK$ по первому признаку подобия ($\angle 3 = \angle 4$ как вертикальные, $\angle 5 = \angle 6$ как накрест лежащие при параллельных сторонах AB и CD и секущей BC).
Значит, KC = EC = 1.
Ответ 1.

Пример 15. Около четырехугольника со сторонами *a*, b, c, d описана окружность. Найти косинус угла между, заключенный между сторонами *a* и b.



Решение. Пусть искомый угол равен x. Применим теорему косинусов дважды: для треугольника со сторонами *a*, b, p имеем: $p^2 = a^2 + b^2 - 2abcosx$; для треугольника со сторонами c, d, p имеем: $p^2 = c^2 + d^2 + 2cdcosx$.

Здесь учтено, что около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180^0.

Приравниваем правые части этих равенств:

$a^2 + b^2 - 2abcosx = c^2 + d^2 + 2cdcosx$; $2cosx(ab + cd) = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$.

$$\cos x = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}.$$

Ответ $\cos x = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$.