Тема № 19 «Произвольный треугольник».

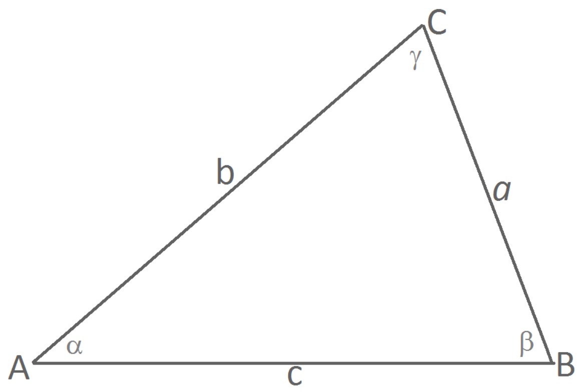
Важнейшие теоремы и формулы планиметрии.

Теорема Фалеса*.* Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной стороне равные отрезки, то эти прямые отсекают на другой стороне также равные отрезки.

Теорема Пифагора*.* В прямоугольном треугольнике, квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов: $c^2 = a^2 + b^2$.

Произвольный треугольник.

a, b, c - стороны; α, β, γ - противолежащие им углы; p- полупериметр; R- радиус описанной окружности; r - радиус вписанной окружности; S - площадь; h_a - высота, проведенная к стороне a:



$$S = pr \quad \text{, где} \quad p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

$$S = \frac{a\,b\,c}{4\,R} \qquad S = \frac{a^2 \sin\beta \ \sin\gamma}{2 \sin\alpha} \qquad S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha \qquad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$r = \frac{S}{p} \qquad R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot S}$$

Решение треугольников.

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Теорема синусов: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$

Длина медианы треугольника: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2}$

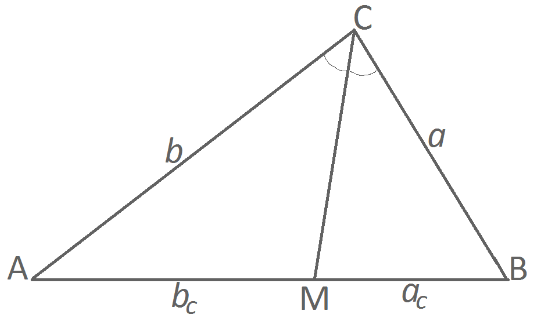
Длина стороны треугольника через медианы: $a = \frac{2}{3}\sqrt{2 \cdot (m_b^2 + m_c^2) - m_a^2}$

Длина биссектрисы треугольника: $l_c = \sqrt{a \cdot b - a_1 \cdot b_1}$

***Равносторонний треугольник*:**

$$S = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \qquad r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6} \qquad R = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$$

Свойства биссектрисы внутреннего угла



CM – биссектриса угла C в треугольнике ABC

$$\frac{a}{b}=\frac{a_c}{b_c}\Leftrightarrow\frac{a}{a_c}=\frac{b}{b_c}$$

Длина биссектрисы $l_c=\sqrt{ab-a_1b_1}$; $\quad l_c=\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$

Длина медианы: $m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$

Длина высоты: $h_c=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Существование окружности, описанной около треугольника:

- все три серединные перпендикуляра треугольника пересекаются в одной точке и эта точка является центром описанной окружности. Описанная около треугольника окружность всегда существует и она единственна;
- центром описанной окружности прямоугольного треугольника является середина гипотенузы.

Существование вписанной в треугольник окружности:

- все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, и эта точка является центром вписанной окружности;
- вписанная в треугольник окружность всегда существует и она единственна.

Отрезки и окружности, связанные с треугольником.

Окружность, касающаяся всех трех сторон треугольника, называется его *вписанной* окружностью.

Окружность, проходящая через все три вершины треугольника, называется его *описанной* окружностью.

Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка пересечения называется центроидом или ***центром тяжести треугольника***.

Центроид делит каждую медиану в отношении 1:2, считая от основания медианы.

Три высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой ***ортоцентром*** треугольника.

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, и эта точка совпадает с центром вписанной окружности.

В равнобедренном треугольнике биссектриса, медиана и высота, проведенные к основанию, совпадают. Верно и обратное: если биссектриса, медиана и высота, проведенные из одной вершины, совпадают, то треугольник равнобедренный.

Если треугольник разносторонний, то для любой его вершины биссектриса, проведенная из нее, лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника также пересекаются в одной точке, которая совпадает с *центром описанной окружности*.

Вне вписанной окружностью называется окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжения двух других сторон.

Середины трех сторон треугольника, основания трех его высот и середины трех отрезков, соединяющих его вершины с ортоцентром, лежат на одной окружности, называемой *окружностью девяти точек*.

В любом треугольнике центр тяжести, ортоцентр, центр описанной окружности и центр окружности девяти точек лежат на одной прямой, называемой *прямой Эйлера*.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон треугольника называется *средней линией треугольника*.

Средняя линия треугольника обладает свойством – она параллельна основанию треугольника и равна ее половине.

Свойства медиан треугольника.

- Медиана разбивает треугольник на два треугольника *одинаковой* площади.
- Медианы треугольника *пересекаются в одной точке*, которая делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины. Эта точка называется центром тяжести треугольника.
- Весь треугольник разделяется своими медианами на шесть равновеликих треугольников.

Свойства высот треугольника.

- В прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, *подобные исходному*.
- В остроугольном треугольнике *две его высоты отсекают от него подобные треугольники*.
- Если треугольник остроугольный, то все основания высот принадлежат сторонам треугольника, а у тупоугольного треугольника две высоты попадают на продолжение сторон.
- Три высоты в остроугольном треугольнике пересекаются в одной точке и эту точку называют *ортоцентром* треугольника.

Свойства серединных перпендикуляров треугольника

- Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Верно и обратное утверждение: каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.
- Точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника, является *центром окружности, описанной около этого треугольника*.

Признаки подобия треугольников:

I. по двум углам;
II. по двум пропорциональным сторонам и углу между ними;
III. по трем пропорциональным сторонам.

Пример 1. Какие из утверждений не являются верными?

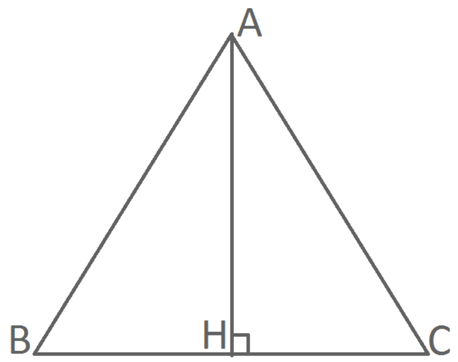
1) Любые два равносторонних треугольника подобны.
2) Любые два равнобедренных прямоугольных треугольника подобны.
3) Любые два неравных прямоугольных треугольника с равными гипотенузами подобны.
4) Если периметры подобных треугольников относятся как 3:2, то площади этих треугольников относятся как 9:4.

1) 3 и 4 2) неверных нет 3) 3 4) 4

Решение.

1) Верно, т.к. треугольники подобны, если их углы равны.
2) Верно, т.к. треугольники подобны по двум углам.
3) Неверно. Например, прямоугольные треугольники с гипотенузой, равной 5, а катеты первого 3 и 4, катеты второго $\sqrt{13}$ и $\sqrt{12}$ (заметим, что $(\sqrt{13})^2 + (\sqrt{12})^2 = 5^2$). Причем катеты не являются пропорциональными. А, значит, треугольники не являются подобными.
4) Верно, т.к. если отношение линейных размеров подобных фигур равно k, то отношение площадей этих фигур равно k^2.

Ответ 3.



Пример 2. Сторона равностороннего треугольника равна 10. Найдите его площадь.

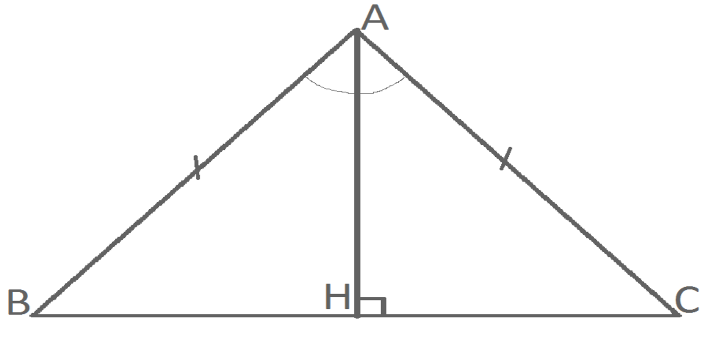
Решение.

$BH = \frac{1}{2}BC$. По теореме Пифагора:

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2}10 \cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$$

Ответ $25\sqrt{3}$.



Пример 3. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10, а угол, лежащий напротив основания равен 120^0. Найдите площадь треугольника.

Решение.

$\triangle ABH: \angle H = 90^0, \angle A = 60^0, \angle B = 30^0$

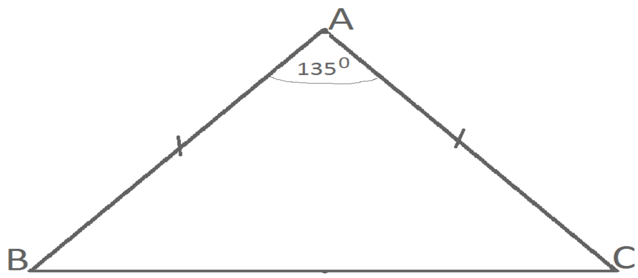
BH = ABcos30^0 = 10√3/2 = 5√3.

Тогда BC = 2BH = 10√3.

AH = ABsin30^0 = 10/2 = 5

$$S_\Delta = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2}10\sqrt{3} \cdot 5 = 25\sqrt{3}$$

Ответ 25√3.



Пример 4. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10, а угол, лежащий напротив основания равен 135^0, основание $10\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Найдите площадь треугольника.

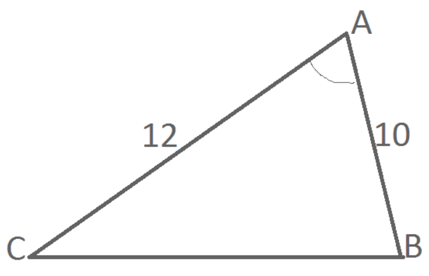
Решение. Заметим, что в задаче лишнее условие (про основание).

$$\sin 135^0 = \sin\left(180^0 - 45^0\right) = \sin 45^0$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\angle A$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}10 \cdot 10 \cdot \sin 45 = 50 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 25\sqrt{2}$$

Ответ 25√2.



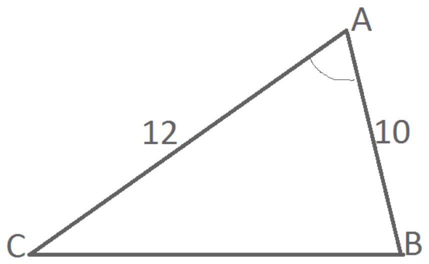
Пример 5. В треугольнике одна из сторон равна 10, другая равна 12, а косинус угла между ними равен $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите площадь треугольника.

Решение.

$$\sin^2\angle A + \cos^2\angle A = 1 \Rightarrow \sin\angle A = \sqrt{1-\cos^2\angle A} = \sqrt{1-\frac{8}{9}} = \frac{1}{3}$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\angle A = \frac{1}{2}10 \cdot 12 \cdot \frac{1}{3} = 20$$

Ответ 20.



Пример 6. В треугольнике одна из сторон равна 10, другая равна 12, а тангенс угла между ними равен $\frac{\sqrt{2}}{4}$. Найдите площадь треугольника.

Решение.

$$1 + tg^2\angle A = \frac{1}{\cos^2\angle A} \Rightarrow \cos\angle A = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{16}}} = \sqrt{\frac{16}{18}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

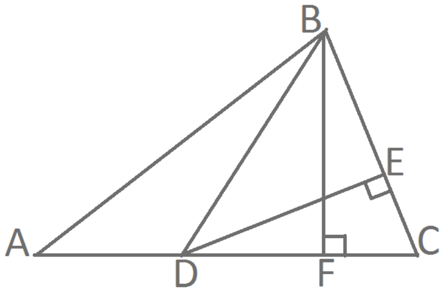
$$\sin\angle A = \sqrt{1-\cos^2\angle A} = \sqrt{1-\frac{16}{18}} = \sqrt{\frac{2}{18}} = \frac{1}{3}$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle A = \frac{1}{2}10\cdot 12\cdot\frac{1}{3} = 20$$

Ответ 20.

Пример 7. Площадь треугольника *ABC* равна *30* см^2. На стороне *AC* взята точка *D* так, что *AD:DC=2:3*. Длина перпендикуляра *DE*, проведенного на сторону *BC*, равна *9* см. Найти *BC*.

Решение. Проведем *BD*; треугольники *ABD* и *BDC* имеют общую высоту *BF*; следовательно, их площади относятся как длины оснований, т.е.:



$$S_{\Delta ABC} : S_{\Delta BDC} = \frac{AD\cdot BF}{2} : \frac{DC\cdot BF}{2} = AD : DC = 2:3$$

откуда

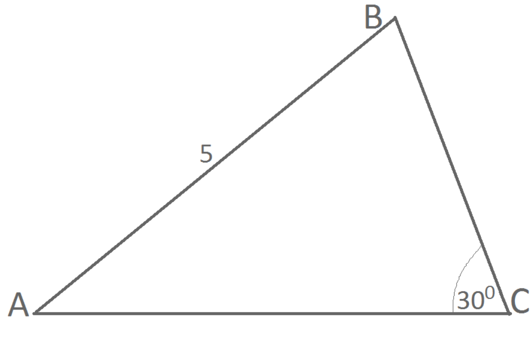
$$S_{\Delta BDC} = \frac{3}{5}S_{\Delta ABC} = 18 см^2.$$

С другой стороны

$S_{\Delta BDC} = \frac{1}{2}BC\cdot DE, \quad или \quad 18 = \frac{1}{2}BC\cdot 9$, откуда BC=4 см.

Ответ: BC=4 см.

Пример 8. В треугольнике *ABC*, *AB=5 см*, $\angle C$ равен *30*°. Найти радиус описанного круга.



Решение. По теореме синусов имеем $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

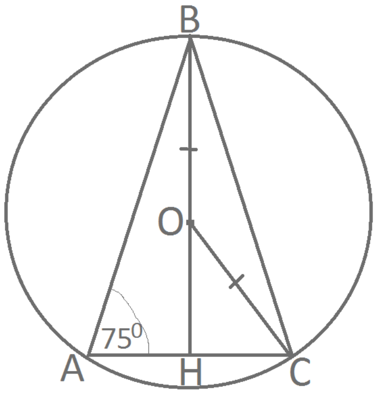
Значит, $\frac{AB}{\sin\angle C} = 2R$, т.е. $2R = \frac{5}{\sin 30^\circ}$.

Последовательно находим 2R = 10, т.е. R = 5 см.

Ответ: 5.

Пример 9. Около равнобедренного треугольника с основанием *AC* и углом при основании *75˚* описана окружность с центром *O*. Найдите ее радиус, если площадь треугольника *BOC* равна *16*.

Решение.



Дано: Δ ABC – равнобедренный, AC – основание, $\angle$ ACB = 75˚, $S_{\Delta BOC}$ = 16

Найти: R - радиус описанной окружности

Δ ABC – равнобедренный, BH – медиана, следовательно, BH – высота, а значит Δ HBC – прямоугольный

$\angle$HBC = 90˚ – $\angle$ ACB, $\angle$HBC = 90˚– 75˚ = 15˚

BO = OC = R, следовательно, Δ BOC – равнобедренный, значит

$\angle$ OBC = $\angle$OCB = 15˚

$\angle$ COB = 180˚ – ($\angle$OBC + $\angle$OCB),

$\angle$ COB = 180˚ – (15˚ + 15˚) = 150˚

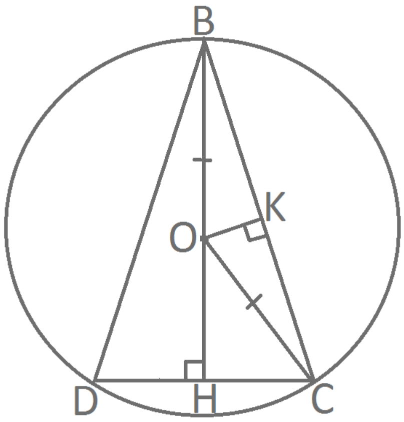
S = (BO · OC sin$\angle$BOC)/2.

S_{BOC} = (R · R · sin 150˚)/2= (R · R)/4 = R^2/2; R^2/4= 16; R^2 = 64; R = 8

Ответ: 8.

Пример 10. Остроугольный равнобедренный треугольник BCD с основанием CD, равным 16, вписан в окружность с центром O и радиусом 10. Найдите площадь треугольника BOC.

Решение.



Так как Δ BCD – равнобедренный, CD = 16, следовательно, DH = HC = 8

Δ DOH – прямоугольный. По теореме Пифагора:

$OH^2 = 10^2 – 8^2$

OH^2 = 100 – 64 = 36

OH = 6

BH = BO + OH = 10 + 6 =16

По теореме Пифагора: $BC^2 = 16^2 + 8^2$ = 256 + 64 = 320

BC =$8\sqrt{5}$.

Δ KBO ~ Δ HBC

$$\frac{S_{BOK}}{S_{BHC}} = k^2 = \left(\frac{10}{8\sqrt{5}}\right)^2 = \left(\frac{5}{4\sqrt{5}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}$$

$$S_{BHC} = \frac{1}{2}\cdot 16 \cdot 8 = 64$$

$$\frac{S_{BOK}}{64} = \frac{5}{16}$$

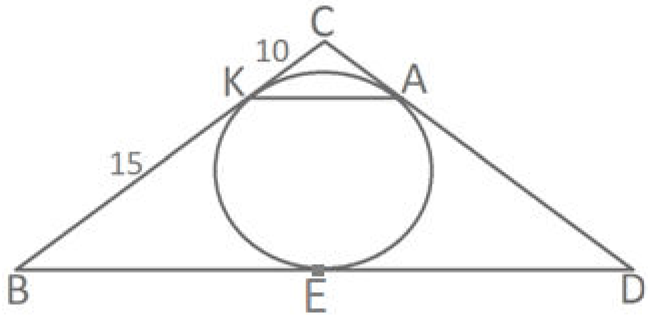
S_{BOK} = 20

S_{BOC} = 2 · S_{BOK} = 2 · 20 = 40

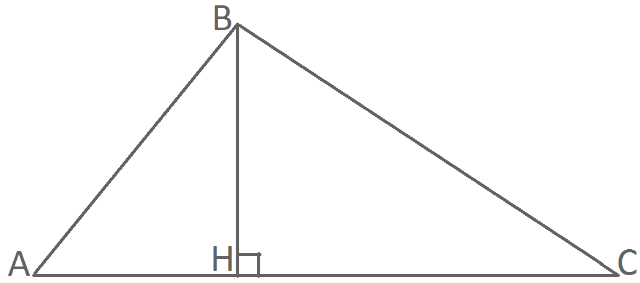
Ответ: 40.

Пример 11. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, касается его боковых сторон в точках K и A. Точка K делит сторону этого треугольника на отрезки 15 и 10, считая от основания. Найдите длину отрезка KA.

Решение.



Дано: *Δ BCD* – равнобедренный, K є BC, A є DC, BK = 15, KC = 10
Найти: KA.
CD = CB = BK + KC, CD = CB = 15 + 10 = 25
CK = CA = 10 (отрезки касательных, проведенные из одной точки), CB = CD, следовательно AD = CD – CA, AD = 25 – 10 = 15.
BE = BK = 15, DE = DA = 15 (отрезки касательных, проведенные из одной точки), следовательно BD = 15 + 15 = 30
Δ CKA ~ Δ CBD (∠C – общий, CK : CB = CA : CD),
следовательно KA : BD = CA : CD, KA : 30 = 10 : 25, KA = 10 · 30 : 25 = 12
Ответ: 12.

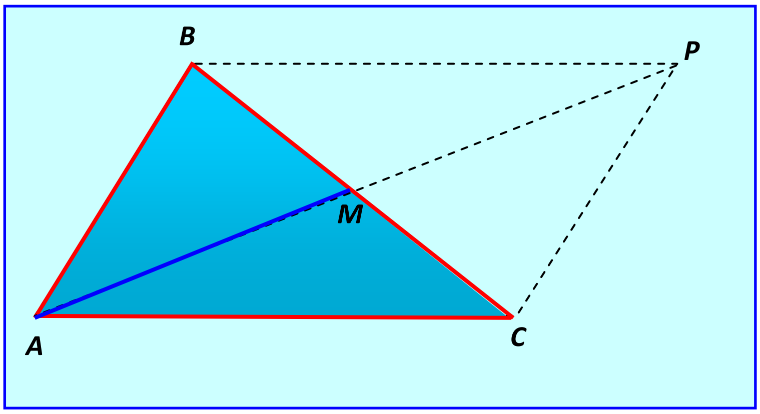


Пример 12. Стороны треугольника равны 12 м, 16 м и 20 м. Найдите го высоту, проведенную из вершины большего угла.
Решение.
$20^2 = 12^2 + 16^2$
400 = 144 + 256
400 = 400 верно,
следовательно, ΔABC – прямоугольный (по теореме, обратной теореме Пифагора)
$S_{ABC} = AB \cdot BC/2$
$S_{ABC} = 12 \cdot 16/2 = 6 \cdot 16 = 96$
$S_{ABC} = AC \cdot BH/2$
$96 = 20 \cdot BH/2$
BH = 9,6.
Ответ: 9,6.

Пример 13. Имеется треугольник с длинами сторон 9 см, 12 см и 18 см. Найти радиус окружности, описанной около треугольника, одна из сторон которого является медианой большей стороны заданного треугольника, а две другие стороны равны 9 см и 12 см.

1) $\frac{33}{2}$ см 2) $\frac{36\sqrt{130}}{65}$ см 3) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ см 4) $\frac{9\sqrt{34}}{8}$ см

Решение. Как известно, радиус окружности, описанной около треугольника, выражается формулой $R = \frac{abc}{4S}$, где *a*, *b*, *c* – стороны треугольника, а *S* – его площадь. Найдем третью сторону треугольника, для которого нужно найти радиус описанной окружности, то есть медиану исходного треугольника, проведенную к стороне длиной *18* см.



Продолжим медиану AM до точки P на отрезок $MP = AM$ и проведем отрезки BP и PM. Четырехугольник $ABPC$ является параллелограммом (так как его диагонали в точке пересечения делятся пополам), поэтому сумма квадратов его диагоналей равна сумме квадратов длин сторон:

$$AP^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2), \quad (2AM)^2 + 18^2 = 2(9^2 + 12^2),$$

$$4AM^2 = 126, \quad AM = \sqrt{\frac{126}{4}} = 3\sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Теперь найдем площадь треугольника со сторонами 9, 12, $3\sqrt{\frac{7}{2}}$ по формуле Герона:

$$p = \frac{1}{2}\left(9 + 12 + 3\sqrt{\frac{7}{2}}\right) = \frac{21}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{7}{2}};$$

$$S = \sqrt{\left(\frac{21}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\right)\left(\frac{21}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{7}{2}} - 9\right)\left(\frac{21}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{7}{2}} - 12\right)\left(\frac{21}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{7}{2}} - 3\sqrt{\frac{7}{2}}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{21}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\right)\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{7}{2}} - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{21}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{441}{4} - \frac{63}{8}\right)\left(\frac{63}{8} - \frac{9}{4}\right)} = \sqrt{\frac{819}{8} \times \frac{45}{8}} = \frac{9\sqrt{455}}{8}.$$

$$R = \frac{9 \times 12 \times 3\sqrt{\frac{7}{2}}}{4 \times \frac{9\sqrt{455}}{8}} = 72\sqrt{\frac{7}{910}} = \frac{72}{\sqrt{130}} = \frac{72\sqrt{130}}{130} = \frac{36\sqrt{130}}{65}.$$

Ответ: 2.