Тема № 18 « Углы. Треугольники. Прямоугольный треугольник».

Основные понятия

- Два угла называются ***смежными,*** если у них одна сторона общая, а две другие стороны этих углов являются ***дополнительными полупрямыми.***
- Сумма смежных углов равна 180°.
- Два угла называются ***вертикальными***, если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми сторон другого.
- Вертикальные углы равны.
- Угол, равный 90°, называется ***прямым углом***. Прямые, пересекающиеся под прямым углом, называются ***перпендикулярными.***
- Через каждую точку на прямой можно провести и притом только одну, перпендикулярную прямую.
- Через каждую точку, не лежащую на прямой можно провести и притом только одну, перпендикулярную прямую.
- Угол, меньший 90°, называется ***острым.*** Угол больший 90°, называется ***тупым***.
- ***Биссектриса угла*** – это геометрическое место точек, равноудаленных от сторон этого угла.

Свойства биссектрисы угла:

- любая точка, лежащая на биссектрисе угла, одинаково удалена от сторон угла;
- любая точка, одинаково удаленная от сторон угла, лежит на биссектрисе угла.

Теоремы (признаки) о параллельности и перпендикулярности прямых:

- две прямые, параллельные третьей – параллельны;
- если при пересечении двух прямых третьей, внутренние (внешние) накрест лежащие углы равны, или внутренние (внешние) односторонние углы в сумме равны 180°, то эти прямые параллельны;
- если параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние и внешние накрест лежащие углы равны, и внутренние и внешние односторонние углы в сумме равны 180°;
- две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой – параллельны;
- прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна и второй.

Свойства серединного перпендикуляра отрезка:

- точка лежащая на серединном перпендикуляре одинаково удалена от концов отрезка;
- любая точка, одинаково удаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре.

Признаки равенства треугольников.

I. по двум сторонам и углу между ними;
II. по стороне и двум прилегающим к ней углам;
III. по трем сторонам.

Треугольник называют ***равнобедренным,*** если у него две стороны равны.

Медианой треугольника называют отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Биссектрисой треугольника называют отрезок прямой, заключенной между вершиной и точкой ее пересечения с противоположной стороной, которая делит угол пополам.

Высота треугольника – это отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на противоположную сторону, или на ее продолжение.

Свойства равнобедренного треугольника:

- в равнобедренном треугольнике углы при основании равны;
- если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный;
- в равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой;
- если в треугольнике медиана и биссектриса (или высота и биссектриса, или медиана и высота), проведенная из какой-либо вершины, совпадают, то такой треугольник равнобедренный.
- В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, против большего угла лежит большая сторона.
- (Неравенство треугольника). У каждого треугольника сумма двух сторон больше третьей стороны.
- Длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющей ее концы.

Внешним углом треугольника ABC при вершине A называется угол, смежный углу треугольника при вершине A.

Треугольник называется ***прямоугольным***, если у него есть прямой угол. В прямоугольном треугольнике сторона, противоположная прямому углу, называется ***гипотенузой*.** Остальные две стороны, называются ***катетами*.**

Свойства сторон и углов прямоугольного треугольника:

- углы, противолежащие катетам – острые;
- гипотенуза больше любого из катетов;
- сумма катетов больше гипотенузы.

Признаки равенства прямоугольных треугольников:

- по катету и острому углу;
- по двум катетам;
- по гипотенузе и катету;
- по гипотенузе и острому углу.

Сумма внутренних углов треугольника:

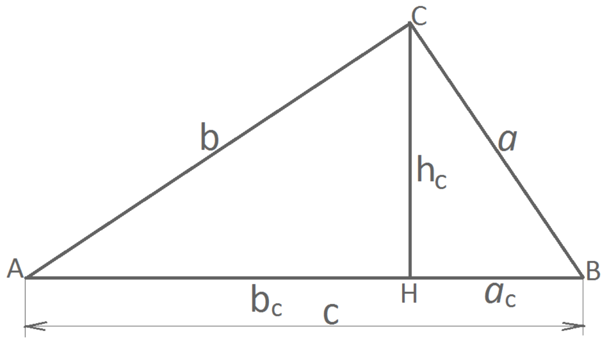
- сумма любых двух углов треугольника меньше 180°;

- в каждом треугольнике два угла острые;
- внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним;
- сумма углов треугольника равна 180°;
- внешний угол треугольника равен сумме двух других углов, не смежных с ним;
- сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

Признаки подобия прямоугольных треугольников:

- по острому углу;
- по пропорциональным катетам;
- по пропорциональным катету и гипотенузе.

Прямоугольный треугольник.



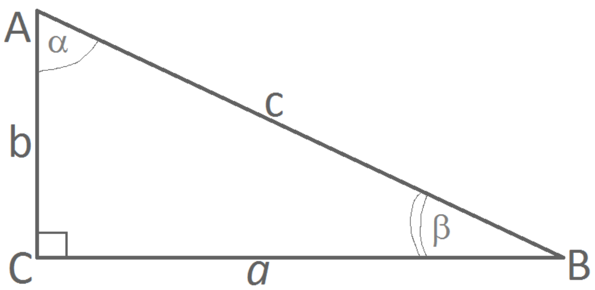
a, b – катеты; c – гипотенуза; a_c, b_c – проекции катетов на гипотенузу:

$$\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c} \qquad \frac{a_c}{a} = \frac{a}{c} \qquad \frac{b_c}{b} = \frac{b}{c}$$

$$S = \frac{1}{2}a \cdot b \qquad S = \frac{1}{2}c \cdot h_c \qquad r = \frac{a+b-c}{2} \qquad R = \frac{c}{2}$$

Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$.

***Решение прямоугольных треугольников*:**



sinα = a/c, cosα = b/c, tgα = a/b

$a = c \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\beta = b \cdot tg\alpha = b \cdot ctg\beta$.

Основное тригонометрическое тождество:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad 1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad 1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

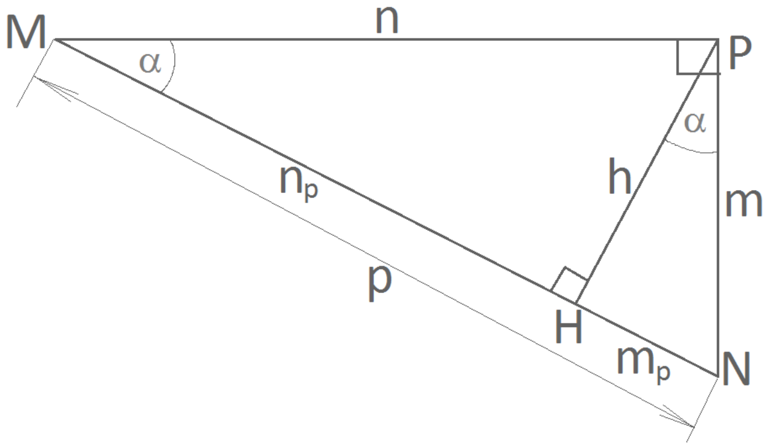
$\beta = 90^0 - \alpha \Rightarrow \sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha,\ \cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha,\ tg(90^0 - \alpha) = ctg\alpha$

α	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	$0^0/360^0$
sin	1/2	√2/2	√3/2	1	0	-1	0
cos	√3/2	√2/2	1/2	0	-1	0	1
tg	1/√3	1	√3	-	0	-	0
ctg	√3	1	1/√3	0	-	0	-

Виды треугольников

- если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник – остроугольный
- если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник – прямоугольный
- если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник – тупоугольный

Пример 1. «Тригонометрический тренажер». Выразить $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ из треугольников MPH, PHN и MPN.



Решение.

$$\sin\alpha = \frac{h}{n} = \frac{m_p}{m} = \frac{m}{p}; \quad \cos\alpha = \frac{n_p}{n} = \frac{h}{m} = \frac{n}{p}; \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{h}{n_p} = \frac{m_p}{h} = \frac{m}{n}$$

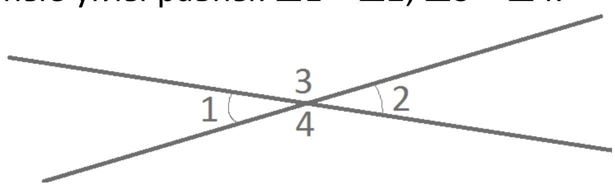
Пример 2. Какое из следующих утверждений верно?

1) Если угол равен 45^0, то вертикальный с ним угол равен 45^0.
2) Любые две прямые имеют ровно одну общую точку.
3) Через любые три точки проходит ровно одна прямая.
4) Если расстояние от точки до прямой меньше 1, то и длина любой наклонной, проведенной из данной точки к прямой, меньше 1.

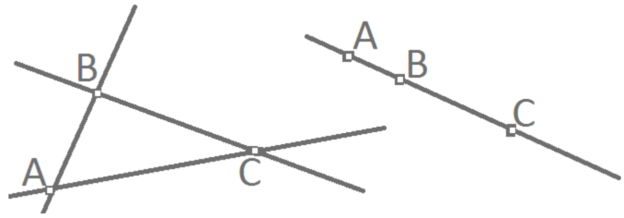
1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

Решение.

1) Верно, т. к. вертикальные углы равны: $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$.



2) Не верно, т.к. прямые могут быть параллельными (ни одной общей точки), могут совпадать (бесконечное число общих точек), могут пересекаться (одна общая точка).
3) Не верно, т.к. возможны два случая:
   а) когда одна из точек не лежит на прямой, на которой находятся две другие точки;
   б) когда все три точки лежат на одной прямой.



4) Не верно, т.к. перпендикуляр, проведённый из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведённой из той же точки к этой прямой.

Ответ 1.

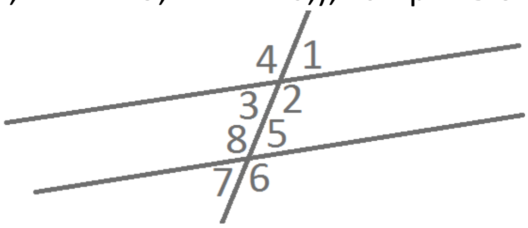
Пример 3. Какое из следующих утверждений верно?

1) Если при пересечении двух прямых третьей прямой соответственные углы равны 65^0, то эти две прямые параллельны.
2) Если при пересечении двух прямых третьей прямой соответственные углы равны 65^0 и 45^0 то эти две прямые параллельны.
3) Через любую точку проходит не более одной прямой.
4) Любые три прямые имеют не менее одной общей точки.

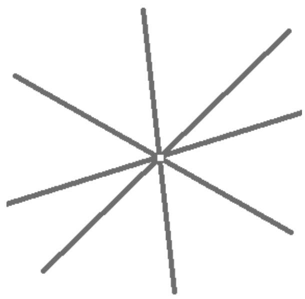
1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

Решение.

1) Верно, т.к. если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны ($\angle 1 = \angle 5$; $\angle 8 = \angle 4$; $\angle 7 = \angle 3$; $\angle 2 = \angle 6$;), то прямые параллельны.



2) Не верно, см п.1
3) Не верно, т.к. через одну точку можно провести бесконечное число прямых (см. рисунок).



4) Не верно, см. решение примера 1 п.3

Ответ 1.

Пример 4. Какие из следующих утверждений верны?

1) Если при пересечении двух прямых секущей внутренние накрест лежащие углы составляют в сумме 90^0, то эти две прямые параллельны.
2) Если угол равен 60^0, то смежный с ним равен 120^0.

3) Если при пересечении двух прямых секущей внутренние односторонние углы равны 70^0 и 110^0, то эти две прямые параллельны.
4) Через любые три точки проходит не более одной прямой.

1) 1 и 2 2) 2 и 3 3) 2 и 4 4) 3 и 4

Решение.

1) Не верно, т.к. если при пересечении двух прямых секущей сумма накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.
2) Верно, т.к. сумма смежных углов равна 180^0.
3) Верно, т.к. если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180^0, то прямые параллельны.
4) Не верно, см. решение примера 1 п.3

Ответ 2.

Пример 5. Какие из следующих утверждений верны?

1) В треугольнике против меньшего угла лежит большая сторона.
2) Если один угол треугольника больше 120^0, то два других его угла меньше 30^0.
3) Если все стороны треугольника меньше 1, то и все его высоты меньше 1.
4) Сумма острых углов прямоугольного треугольника не превосходит 90^0.

1) 3 и 4 2) только 4 3) только 3 4) все верны

Решение.

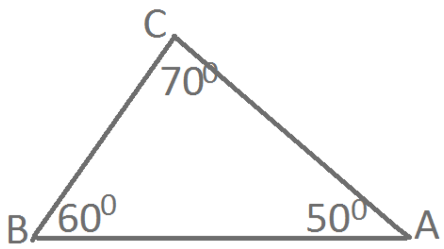
1) Не верно, т.к. в треугольнике против большего угла лежит большая сторона.
2) Не верно, т.к. сумма углов треугольника равна 180^0.
3) Верно, т.к. перпендикуляр, проведённый из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведённой из той же точки к этой прямой.
4) Не верно, т.к. сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90^0.

Ответ 3.

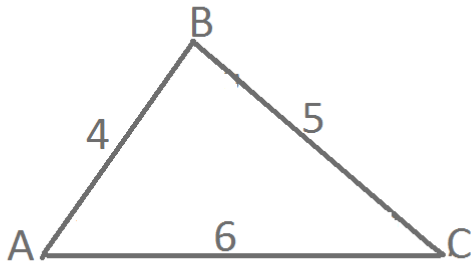
Пример 6. Какие из следующих утверждений не верны?
1) В треугольнике ABC, для которого угол A = 50^0,угол B = 60^0, угол C = 70^0, сторона BC — наименьшая.
2) В треугольнике ABC, для которого AB = 4,BC = 5, AC = 6, угол B — наибольший.
3) Внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла.
4) Треугольник со сторонами 1, 2, 3 не существует.

1) 2 и 3 2) только 3 3) 3 и 4 4) все верны

Решение.
1) Верно, т.к. в треугольнике против меньшего угла лежит меньшая сторона.



2) Верно, т.к. в треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

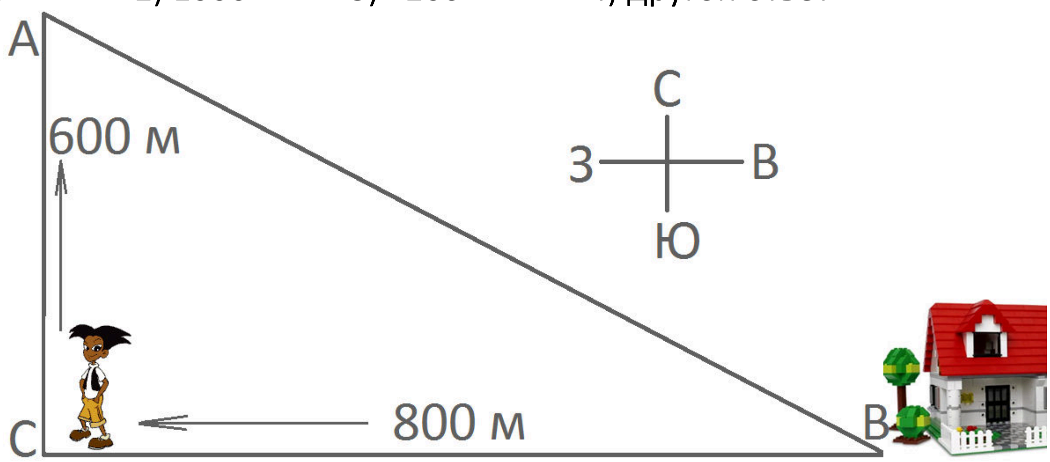


3) Не верно, т.к. внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежным с ним.
4) Верно, т.к. каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, а у нас 3 = 2 + 1.

Ответ 2.

Пример 7. Мальчик прошел от дома по направлению на запад 800 м. Затем повернул на север и прошел 600 м. На каком расстоянии (в метрах) от дома оказался мальчик?

1) 1400 2) 1000 3) 200 4) другой ответ



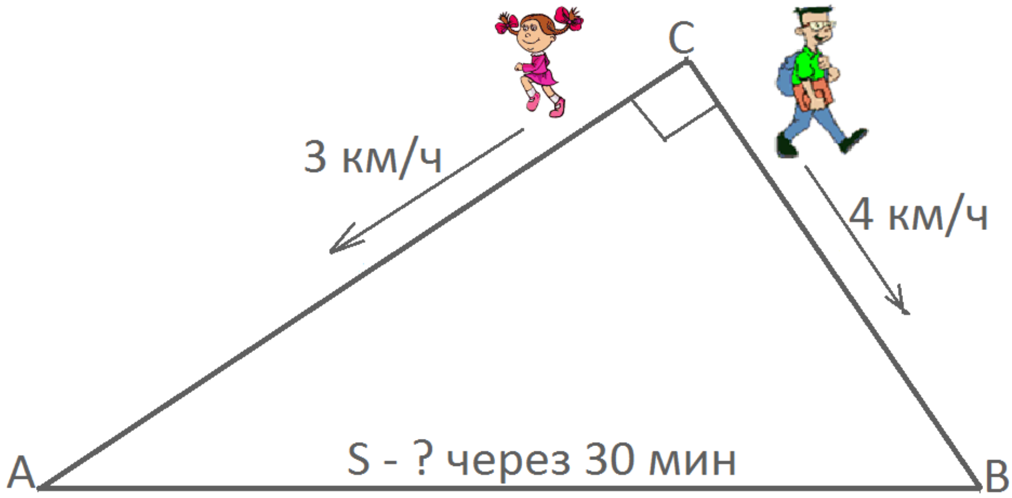
Решение. По теореме Пифагора:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 800^2 + 600^2 = 640\ 000 + 360\ 000 = 1000\ 000$ м^2; AB = 1000 м.

Ответ 2.

Пример 8. Мальчик и девочка, расставшись на перекрестке, пошли по взаимно перпендикулярным дорогам, мальчик со скоростью 4 км/ч, девочка – 3 км/ч. Какое расстояние (в км) будет между ними через 30 минут?

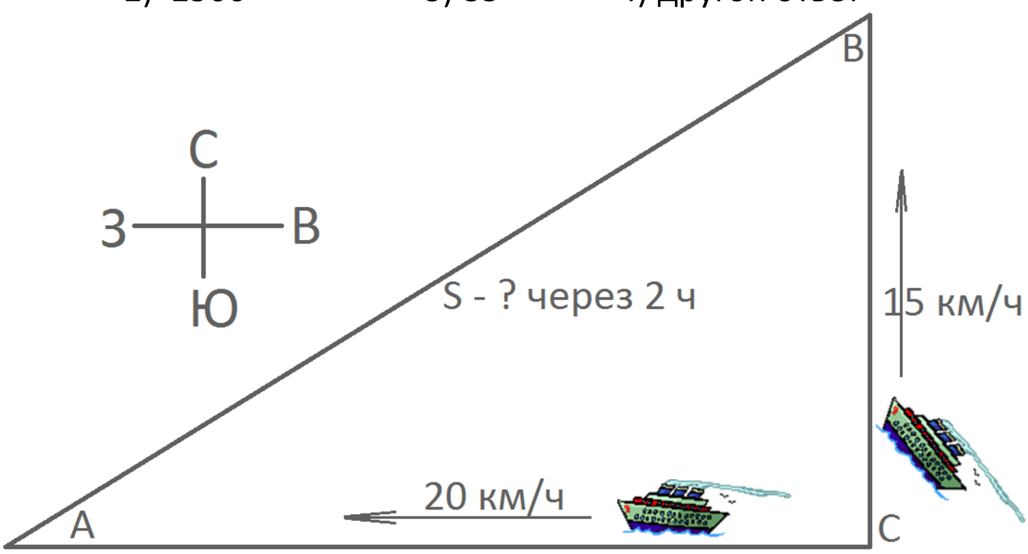
1) 6,25 2) 7 3) 2,5 4) другой ответ



Решение. 30 мин = 0,5 ч. По теореме Пифагора:
$AB^2 = AC^2 + BC^2 = (3 \cdot 0{,}5)^2 + (4 \cdot 0{,}5)^2 = 2{,}25 + 4 = 6{,}25$ км^2; AB = 2,5 км.
Ответ 3.

Пример 9. Два парохода вышли из порта, следуя один на север, другой на запад. Скорости их равны соответственно 15 км/ч и 20 км/ч. Какое расстояние (в километрах) будет между ними через 2 часа?

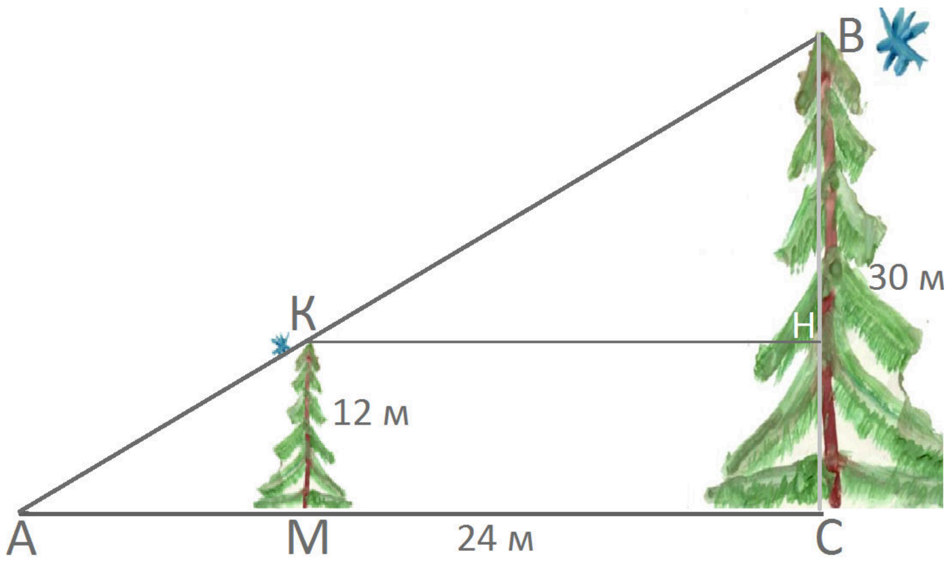
1) 50 2) 2500 3) 35 4) другой ответ



Решение. По теореме Пифагора:
$AB^2 = AC^2 + BC^2 = (15 \cdot 2)^2 + (20 \cdot 2)^2 = 900 + 1600 = 25\,00$ км^2; AB = 50 км.
Ответ 1.

Пример 10. В 24 м одна от другой растут две сосны. Высота одной 30 м, а другой — 12 м. Найдите расстояние (в метрах) между их верхушками.

1) другой ответ 2) 18 3) 30 4) 50



Решение. Надо найти КВ -?

1- й способ:

Рассмотрим подобные треугольники ΔАВС и ΔАКМ:

$$\frac{BC}{KM} = \frac{AC}{AM} = \frac{AB}{AK} = k \Leftrightarrow k = \frac{30}{12} = 2{,}5$$

АС = 2,5 АМ = 2,5(АС – 24); АС = 2,5АС – 60; 1,5АС = 60; АС = 40 м.

АМ = АС – МС = 40 – 24 = 16 м.

По теореме Пифагора в ΔАКМ:

$AK^2 = AM^2 + KM^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400$ м^2; АК = 20 м.

По теореме Пифагора:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 40^2 + 30^2 = 1600 + 900 = 2500$ м^2; АВ = 50 м.

Тогда КВ = АВ – АК = 50 – 20 = 30 м.

2-й способ:

Проведем перпендикуляр к ВС – отрезок КН.

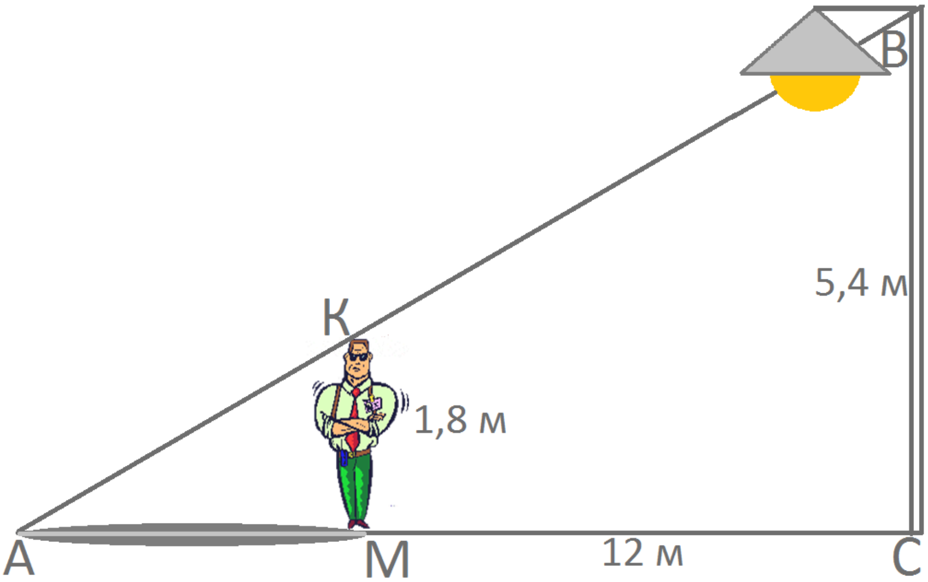
По теореме Пифагора (учитывая, что НВ = ВС – НС = 30 – 12 = 18 м):

$KB^2 = KH^2 + BH^2 = 24^2 + 18^2 = 576 + 324 = 900$ м^2; КВ = 30 м.

Ответ 3.

Пример 11. Человек ростом 1,8 м стоит на расстоянии 12 м от столба, на котором висит фонарь на высоте 5,4 м. Найдите длину тени человека в метрах.

1) другой ответ 2) 6 3) 3,6 4) 18



Решение. Надо найти AM -?

Рассмотрим подобные треугольники ΔABC и ΔAKM:

$$\frac{BC}{KM} = \frac{AC}{AM} = \frac{AB}{AK} = k \Leftrightarrow k = \frac{5{,}4}{1{,}8} = 3$$

AC = 3 AM = 3(AC – 12); AC = 3AC – 36; 2AC = 36; AC = 18 м.

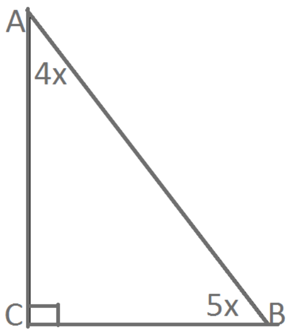
AM = AC – MC = 18 – 12 = 6 м.

Ответ 2.

Пример 12. Два острых угла прямоугольного треугольника относятся как 4:5. Найдите больший острый угол. Ответ дайте в градусах.

1) 40 2) 50 3) 90 4) другой ответ

Решение.



$\angle A = 4x, \quad \angle B = 5x$

$\angle A + \angle B = 90°$

$4x + 5x = 90°$

$x = 10°$

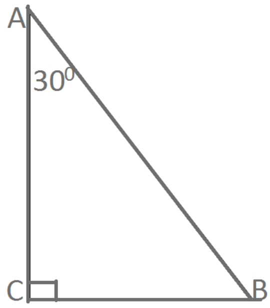
$\angle A = 40°$

$\angle B = 50°$

Ответ 2.

Пример 13. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 10, а угол, лежащий напротив него, равен 30^0 . Найдите площадь треугольника.

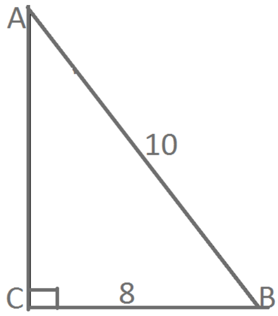
Решение.



$$S = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot CA$$
$$BC = \frac{1}{2}AB \Rightarrow AB = 2BC = 20$$
$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{400 - 100} = 10\sqrt{3}$$
$$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10\sqrt{3} = 50\sqrt{3}$$

Ответ $50\sqrt{3}$.

Пример 14. В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, AB=10, BC=8. Найдите cosA.
Решение.



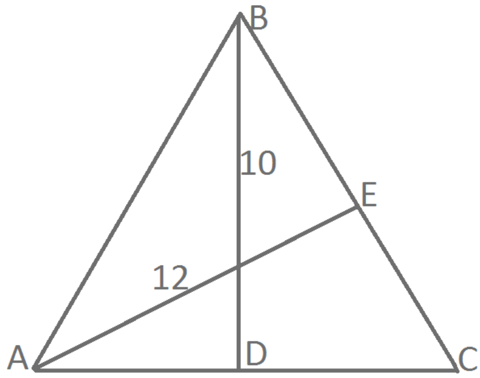
$\cos A = \dfrac{AC}{AB}$, где *AC* – прилежащий катет, *AB* – гипотенуза.

Вычислим катет *AC*. Для этого применим теорему Пифагора: $AC^2 + CB^2 = AB^2$, тогда $AC^2 = AB^2 - CB^2$, тогда $AC = \sqrt{AB^2 - CB^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$.

Окончательно получаем $\cos A = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$.

Ответ: 0.6

Пример 15. В равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к основанию и к боковой стороне, равны *10* и *12* см, соответственно. Найти длину основания.



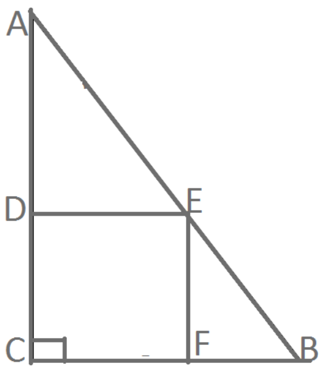
Решение. В ΔABC имеем AB=BC, BD⊥AC, AE⊥DC, BD=10 см и AE=12 см. Пусть AC = x, AB = BC = y. Прямоугольные треугольники *AEC* и *BDC* подобны (угол *C* общий); следовательно, BC : AC = ВД : AE или y:x =5:6.

Применяя теорему Пифагора к ΔBDC, имеем $BC^2 = BD^2 + DC^2$, т.е. $y^2 = 100 + x^2/4$.

В итоге, мы получили систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ y^2 = 100 + \dfrac{x^2}{4}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим x = 15 см. Итак, AC=15 см.
Ответ: 15.



Пример 16. В прямоугольный треугольник вписан квадрат, имеющий с ним общий угол. Найдите площадь квадрата, если катеты треугольника равны 10 м и 15 м.

Дано: Δ ABC – прямоугольный, AC = 15, CB = 10

Найти: S_{CDEF}

Решение.

1. Δ ADE ~ Δ ACB (∠ A – общий, ∠ ADE = ∠ ACB = 90°)
2. Пусть DE = DC = X, тогда AD = 15 – X

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CB}$$

3.
15 · X = 10(15 – X)
15 · X = 150 – 10 · X
25 · X = 150
X = 6
DE = DC = 6
4. $S_{кв.} = 6 \cdot 6 = 36$

Ответ: 36.

Пример 17. В прямоугольном треугольнике найти отношение радиусов вписанной и описанной окружностей, если отношение катетов равно 2:3.

1) $\frac{3\sqrt{7}-7}{7}$ 2) $\frac{5\sqrt{13}-13}{13}$ 3) $\frac{4\sqrt{7}-7}{7}$ 4) $\frac{5\sqrt{11}-11}{11}$

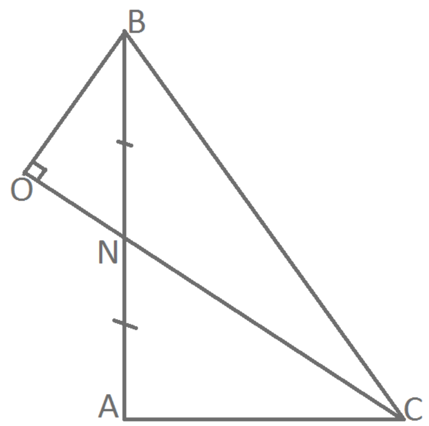
Решение. Обозначим катеты треугольника 2*a* и 3*a*, тогда его гипотенуза равна $\sqrt{4a^2+9a^2}=a\sqrt{13}$. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы, то есть $R=\frac{a\sqrt{13}}{2}$. Радиус вписанной окружности равен отношению площади треугольника к его полупериметру. Учитывая, что площадь равна половине произведения катетов, найдем *r*:

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 3a=3a^2, \quad r=\frac{S}{p}=\frac{3a^2}{\frac{1}{2}\left(2a+3a+a\sqrt{13}\right)}=\frac{6a}{5+\sqrt{13}};$$

$$\frac{r}{R}=\frac{6a}{5+\sqrt{13}}:\frac{a\sqrt{13}}{2}=\frac{12}{5\sqrt{13}+13}=\frac{12\left(5\sqrt{13}-13\right)}{25\cdot 13-13^2}=\frac{12\left(5\sqrt{13}-13\right)}{12\cdot 13}=\frac{5\sqrt{13}-13}{13}.$$

Ответ: 2.

Пример 18. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 10 см, а радиус описанной окружности √13 см. Найти расстояние от вершины меньшего угла до медианы, проведенной к большему катету.



Решение.

Найдем длины катетов. Пусть *AB* = *x*, *AC* = *y*. Как известно, радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы, следовательно, *BC* = 2√13. Тогда для *x* и *y* можно составить систему уравнений: $\begin{cases} x+y=10 \\ x^2+y^2=52 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} y=10-x \\ 100-20x+2x^2=52 \Rightarrow x^2-10x+24=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases} \\ \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Поскольку в качестве *x* выбран больший катет, будем считать, что *AB* = 6, *AC* = 4.

Проведем медиану CN и опустим на ее продолжение перпендикуляр BO, длину которого нужно найти. Прямоугольные треугольники BON и CNA подобны, так как их углы при вершине N равны как вертикальные. Следовательно, $\frac{BO}{AC} = \frac{BN}{NC}, \frac{BO}{3} = \frac{3}{NC}$.

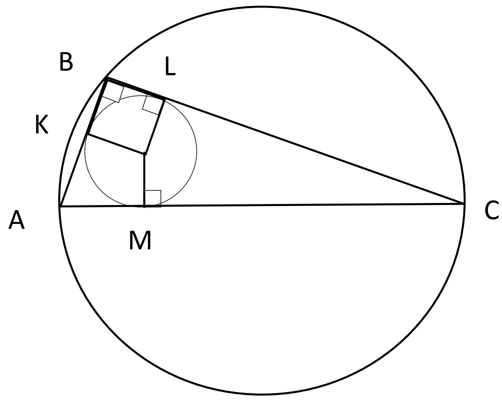
Найдем медиану NC как гипотенузу прямоугольного треугольника CNA:

$$NC = \sqrt{AN^2 + AC^2} = \sqrt{9+16} = 5, \frac{BO}{3} = \frac{3}{5}, BO = \frac{9}{5} = 1{,}8.$$

Ответ: 1,8 см.

Пример 19. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен *2* м, а радиус описанной окружности равен *5 м*. Найдите больший катет треугольника.

Решение.



$AC = 2r = 10$ м

Пусть $AM = AK = x$, $MC = CL = y$

По теореме Пифагора:

$x + y = 10$

$(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = (x + y)^2$

$y = 10 – x$

$(x + 2)^2 + (10 – x + 2)^2 = (x + 10 – x)^2$

$(x + 2)^2 + (12 – x)^2 = 100$

$x^2 + 4x + 4 +144 – 24x + x^2 = 100$

$2x^2 – 20x + 148 = 100$

$2x^2 – 20x + 48 = 0$

$x^2 – 10x + 24 = 0$

$x_1 = 6, x_2 = 4$

$y = 10 – x$

$x = 6$	$x = 4$
$y = 4$	$y = 6$

Так как нужно найти больший катет, то берем *y = 6*.

$BC = 2 + 6 = 8$ м

Ответ: $BC = 8$ м.