Тема № 17 «Задания с параметром»

Основные формулировки заданий с параметром:

1) Найти все значения параметра, при каждом из которых выполняется определенное условие.
2) Решить уравнение или неравенство с параметром *a.*

Линейная функция в заданиях с параметром

А) $f(a)\cdot x = g(a)$,

При $f(a) \neq 0$, решение $x = \frac{g(a)}{f(a)}$,

При $f(a) = 0$, $g(a) \neq 0$ решений нет

При $f(a) = 0$, $g(a) = 0$ решений бесконечно много $x \in R$.

Б) $f(a)\cdot x < g(a)$,

При $f(a) > 0$, $x \in (-\infty; g(a)/f(a))$

При $f(a) < 0$, $x \in (g(a)/f(a); +\infty)$

При $f(a) = 0$, $g(a) < 0$ решений нет

При $f(a) = 0$, $g(a) > 0$ решений бесконечно много $x \in R$.

Пример 1. Решить уравнение и определить знаки корней: $ax + 2x + 3 = 1 - x$.

Решение. $ax + 2x + x = 1 - 3$

$ax + 3x = -2$

$(a + 3)x = -2$

При $a = -3$ уравнение $0\cdot x = -2$ не имеет решений.

При $a \neq -3$ решение $x = -\frac{2}{a+3}$.

Решение будет положительным, если: $-\frac{2}{a+3} > 0 \Rightarrow a + 3 < 0 \Rightarrow a < -3$

Решение будет отрицательным, если: $-\frac{2}{a+3} < 0 \Rightarrow a + 3 > 0 \Rightarrow a > -3$

Ответ: При $a = -3$, $x \in \varnothing$;

при $a \neq -3$, $x = -\frac{2}{a+3}$;

при $a < -3$, $x > 0$;

при $a > -3$, $x < 0$.

Пример 2. Решите уравнение: $\frac{5}{ax-4} = \frac{1}{9x-a}$. (1)

Решение. Приведем уравнение (1) к простейшему виду:

$45x - 5a - ax + 4 = 0$;

$(45 - a)x = 5a - 4$. (2)

При $a \neq 45$ решение (2) $x = \frac{5a-4}{45-a}$

При $a = 45$, то уравнение решений не имеет, т.к. $0 \cdot x = 221$.

Допустимыми значениями *x* и *a* будут значения, при которых общий знаменатель (1) не равен нулю:

ax – 4 = 0 при x = 4/a

9x – a = 0 при x = a/9

Найдем *a*, при которых (1) и (2) не равносильны или (1) не имеет числового смысла. Подставив в (2) $x = \frac{4}{a}$ и $x = \frac{a}{9}$.

$x = \frac{4}{a}$	$x = \frac{a}{9}$
$(45 - a)\frac{4}{a} = 5a - 4$	$(45 - a)\frac{a}{9} = 5a - 4$
$\frac{180}{a} - 4 = 5a - 4$	$5a - \frac{a^2}{9} = 5a - 4$
$180 - 4a = 5a^2 - 4a$	$45a - a^2 = 45a - 36$
$-5a^2 = -180$	$-a^2 = -36$
$a^2 = 36$	$a^2 = 36$
$a_{1,2} = \pm 6$	$a_{1,2} = \pm 6$

Таким образом, при $a = \pm 6$ уравнение (1) не имеет числового смысла, т. е. $a = \pm 6$ — недопустимые значения параметра *a* для (1). При $a = \pm 6$ можем решать уравнение (2).

Ответ: При $a \neq \pm 6$, $a \neq 45$, $x = \frac{5a - 4}{45 - a}$;

при $a = 45$, $a = \pm 6$ $x \in \varnothing$.

Пример 3. Найти все b, при каждом из которых решение уравнения

6 – 3b + 4bx = 4b +12x меньше 1.

Решение. Сначала решим уравнение: 6 – 3b + 4bx = 4b +12x.

4bx – 12x = 3b – 6 + 4b

(4b – 12)x = 7b – 6

При 4b – 12 = 0 получим 0x = 15, x$\in\varnothing$.

При b $\neq$ 3, $x = \frac{7b - 6}{4b - 12}$.

Найдем те значения *b*, при которых решение уравнения меньше 1, т.е. x < 1.

$$\frac{7b-6}{4b-12} < 1 \Leftrightarrow \frac{7b-6}{4b-12} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{7b-6-4b+12}{4b-12} < 0 \Leftrightarrow \frac{3b+6}{4b-12} < 0 \Leftrightarrow \frac{b+2}{b-3} < 0$$

Ответ: – 2 < b < 3.

Пример 4. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых корень уравнения $3x(a+4)=6a+35$ в три раза меньше корня уравнения $2(-x-1)=3(2-x)$.

Решение. $2(-x-1)=3(2-x) \Leftrightarrow -2x-2=6-3x \Leftrightarrow -2x+3x=6+2 \Leftrightarrow x=8$

Если x = 8 корень уравнения $2(-x-1)=3(2-x)$, то x = 8/3 корень уравнения $3x(a+4)=6a+35$ (по условию).

Подставим x = 8/3 в уравнение $3x(a+4)=6a+35$:

$$3\cdot\frac{8}{3}(a+4)=6a+35 \Leftrightarrow 8a+32=6a+35 \Leftrightarrow 8a-6a=35-32 \Leftrightarrow 2a=3 \Leftrightarrow a=\frac{3}{2}$$

Ответ: $a=\frac{3}{2}$.

Пример 5. Решите уравнение с параметром *a*: $\frac{3x-2}{a^2-2a}+\frac{x-1}{a-2}+\frac{2}{a}=0$.

Решение. $a^2-2a=a(a-2)\neq 0 \Rightarrow a\neq 0$ и $a\neq 2$

$$3x-2+ax-a+2a-4=0 \Leftrightarrow 3x+ax+a-6=0 \Leftrightarrow (a+3)x=6-a$$

Если *a* = – 3, то 0·x = 9, x∈∅.
Если *a* ≠ – 3, то x = (6 – *a*)/(*a* + 3)
Ответ при *a* = – 3, *a* = 0; *a* = 2 x∈∅;
при *a* ≠ – 3, *a* ≠ 0; *a* ≠ 2 x = (6 – *a*)/(*a* + 3).

Пример 6. Решить неравенство для каждого значения параметра: $bx-b\geq -3x$.
Решение. $bx+3x\geq b \Leftrightarrow (b+3)x\geq b$

Возможны следующие случаи:

1) $b=-3$, $x\cdot 0>-3,\ x\in R$

2) $b>-3$, $x\geq\frac{b}{b+3}$

3) $b<-3$, $x\leq\frac{b}{b+3}$

Ответ: при $b<-3$, $x\leq\frac{b}{b+3}$;
при $b=-3$, $x\in R$.

Пример 7. При каких значениях *a* неравенство $3x-2>a-x+4$ является следствием неравенства $2x+a>0$?
Решение. Сначала решим каждое неравенство.

1) $3x-2>a-x+4 \Leftrightarrow 4x>a+6 \Leftrightarrow x>\frac{a+6}{4}$ $\qquad x\in\left(\frac{a+6}{4};+\infty\right)$

2) $2x+a>0 \Leftrightarrow x>-\frac{a}{2}$ $\qquad x\in\left(-\frac{a}{2};+\infty\right)$

Множество решений второго неравенства должно содержаться в множестве решений первого неравенства. Это возможно, если:

$$-\frac{a}{2} \ge \frac{a+6}{4} \Leftrightarrow -2a \ge a+6 \Leftrightarrow -3a \ge 6 \Leftrightarrow a \le -2$$

Ответ: $a \in (-\infty; -2]$.

Пример 8. При каких значениях *a* неравенства $2x+1 < x+2a$ и $x-2a-3 < 2a$ равносильны?

Решение. Сначала решим каждое неравенство.

$$2x+1 < x+2a \Leftrightarrow 2x-x < 2a-1 \Leftrightarrow x < 2a-1 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 2a-1)$$

$$x-2a-3 < 2a \Leftrightarrow x < 4a+3 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 4a+3)$$

У равносильных неравенств множества их решений совпадают.

Найдем *a*, решив уравнение:

$$2a-1 = 4a+3 \Leftrightarrow 2a-4a = 3+1 \Leftrightarrow -2a = 4 \Leftrightarrow a = -2$$

Ответ: $a = -2$

Пример 9. Решить неравенство и найти значение параметра t, при котором неравенство $(2x - 1)t^2 - (9x - 10)t + 4x + 8 \le 0$ не имеет решений. Если таких значений несколько, то найти их сумму.

Решение: Это линейное неравенство относительно «x». Раскроем скобки и вынесем его за скобки: $(2t^2 - 9t + 4)x \le t^2 - 10t - 8$, $(t - 4)(2t - 1)x \le t^2 - 10t - 8$,

1) Если $(t - 4)(2t - 1) > 0$, то решение $x \in (-\infty; B]$, где $B = \frac{t^2 - 10t - 8}{(t-4)(2t-1)}$
2) Если $(t - 4)(2t - 1) < 0$, то решение $x \in [B; +\infty)$
3) Если $(t - 4)(2t - 1) = 0$, то

   При $t = 4$, $0 \cdot x \le -8$, нет решений

   При $t = ½$, $0 \cdot x \le -12\frac{3}{4}$, нет решений

Все решения: при $t \in (-\infty; 1/2) \cup (4; +\infty)$, то $x \in (-\infty; B]$, где $B = \frac{t^2 - 10t - 8}{(t-4)(2t-1)}$.

при $t \in (1/2; 4)$, то $x \in [B; +\infty)$, при $t = ½$ или при $t = 4$ решений нет.

Нас интересует случай, когда решений нет, тогда 4 + ½ = 4,5.

Ответ 4,5.

Пример 10. Найти все значения параметра t, при которых система имеет 2012 решений. Если таких значений несколько, то найти их сумму.

$$\begin{cases} (2t^2 - 7t)x - 25y = 2t^2 - 9t - 50, & (1) \\ 6x - 5y + 3 = 0. & (2) \end{cases}$$

Решение: (1) и (2)– это линейные уравнения относительно двух переменных x и y. Каждое из уравнений является уравнением прямой. Если прямые пересекаются, то система имеет единственное решение. Если прямые совпадают, то решений бесконечно много или, например, 2012 штук.

Выразим из второго уравнения 5y и подставим в первое, получим:

$$\begin{cases}(2t^2-7t)x-5(6x+3)=2t^2-9t-50,\\ \qquad\qquad 5y=6x+3\end{cases}$$

Продолжим решать первое уравнение:

$$(2t^2-7t)x-30x-15=2t^2-9t-50,$$
$$(2t^2-7t-30)x=2t^2-9t-35,$$
$$(t-6)(2t+5)x=(t-7)(2t+5).$$

Из последнего уравнения видно, что система имеет бесконечно много решений, когда $2t + 5 = 0$, т.е. $t = -2{,}5$.

Заметим, что при $t = 6$ или $t =7$ решений нет.

Ответ -2,5.

Квадратичная функция в заданиях с параметром

Уравнение вида $Ax^2 + Bx + C = 0$, где A, B, C – выражения, зависящие от параметров, $A\neq0$, x – переменная, называется *квадратным уравнением с параметрами*.

Во множестве действительных чисел это уравнение исследуется по следующей схеме.

1) Если $A = 0$, то имеем линейное уравнение $Bx + C =0$.
2) Если $A\neq0$ дискриминант $D = B^2 - 4AC < 0$, то уравнение решений не имеет.
3) Если $A\neq0$ дискриминант $D =0$, то уравнение имеет единственное решение $x = -B/(2A)$.
4) Если $A\neq0$ дискриминант $D = B^2 - 4AC < 0$, то уравнение имеет два корня $x_{1,2}= (-B\pm\sqrt{D})/(2A)$.

Пример 11. Найти все значения параметра t, для которых квадратное уравнение $(t - 1)x^2 + 2(2t + 1)x + 4t +3 = 0$ а) имеет два корня; б) не имеет корней; в) имеет один корень.

Решение: Данное уравнение по условию является квадратным, поэтому $t - 1 \neq 0$, $t \neq 1$. Рассмотрим дискриминант: $D = 4(2t + 1)^2 - 4(t - 1)(4t + 3) = 4(5t + 4)$.

Согласно схеме исследования, имеем:

а) $\begin{cases}D>0\\ t\neq1\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}4(5t+4)>0,\\ \quad t\neq1\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}t>-4/5\\ \quad t\neq1\end{cases},$

б) $\begin{cases}D<0\\ t\neq1\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}t<-\frac{4}{5}\\ t\neq1\end{cases}\leftrightarrow t<-\frac{4}{5};$

в) $\begin{cases}D=0\\ t\neq1\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}t=-4/5,\\ \quad t\neq1\end{cases}\leftrightarrow t=-4/5.$

Ответ а) при $t > -4/5$ $t \neq 1$ два корня; б) при $t < -4/5$ нет корней;
в) при $t = -4/5$ один корень.

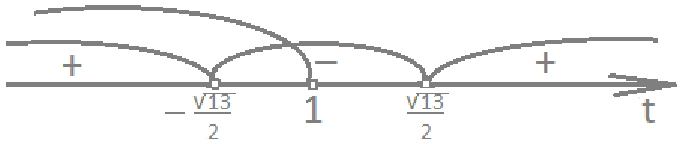
Пример 12. Найти наибольшее целое значение параметра t, для которого выполняется неравенство: $(1-t)x^2+3x-t-1>0$.

Решение: В левой части неравенства квадратный трехчлен, который будет всегда положительным при ветвях параболы, направленных вверх (т.е. $1 - t > 0$ или $t < 1$) и отрицательном дискриминанте:

$$D=9+4(1-t)(t+1)<0, \qquad D=13-4t^2=-4\left(t^2-\frac{13}{4}\right)<0.$$

$$\begin{cases} t < 1 \\ 4\left(t-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(t+\frac{\sqrt{13}}{2}\right) > 0. \end{cases}$$

Изобразим решения системы на числовой прямой:



Все решения неравенства: t ϵ (−∞; −√13/2). Наибольшее целое число ≈-2, т.к. −√13/2 ≈ -1,8.
Ответ -2.

Пример 13. При каком значении *p* корни уравнения $5x^2-4(p+3)x+4=p^2$ противоположны по знаку? Найти эти корни.
Решение.

$$5x^2-4(p+3)x+4-p^2=0$$

$$x_2=-x_1$$

По теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{4}{5}(p+3) \\ x_1\cdot x_2=\frac{4-p^2}{5} \end{cases}$$

Подставляем $(-x_1)$, вместо x_2:

$$\begin{cases} 0=\frac{4}{5}(p+3) \\ -x_1^2=\frac{4-p^2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=-3 \\ x_1^2=-\frac{4-p^2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=-3 \\ x_1^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=-3 \\ x_1=\pm 1 \end{cases}$$

Ответ: при $p = -3$ $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Пример 14. При каких значениях параметра *a* модуль разности корней уравнения $2x^2-6x+1-a=0$ не превосходит 10?

1) [5; 46] 2) [-3.5; 46,5] 3) [6; 47] 4) [-2,5; 42] 5) [4; 40]

Решение. Определим, как выражается модуль разности корней через коэффициенты квадратного уравнения общего вида:

$$ax^2+bx+c=0, \quad x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$|x_1-x_2|=\left|\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|=\left|\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}\right|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}.$$

Соответственно для данного уравнения

$$\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{36-8(1-a)}=2\sqrt{2a+7}, \quad |x_1-x_2|=\frac{2\sqrt{2a+7}}{2}=\sqrt{2a+7}.$$

Учитывая, что для существования корней необходимо, чтобы дискриминант был неотрицательным, получаем систему неравенств для *a*:

$$\begin{cases} 2a+7 \ge 0 \\ \sqrt{2a+7} \le 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \ge -3,5 \\ 2a+7 \le 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \ge -3,5 \\ a \le 46,5 \end{cases} \Rightarrow -3,5 \le a \le 46,5.$$

Итак, номер правильного ответа – 2.
Ответ: 2.

Пример 15. При каких значениях параметров a и b все решения неравенства $x^4 + x^3 - x^2 + ax + b \le 0$ образуют отрезок [-2; 1] ?

Решение. Для выполнения условия задачи необходимо, чтобы числа -2 и 1 были корнями уравнения $x^4 + x^3 - x^2 + ax + b = 0$. Подставив эти значения в уравнение, получим систему уравнений для определения a и b: $\begin{cases} 1+1-1+a+b=0 \\ 16-8-4-2a+b=0 \end{cases}$; $\begin{cases} a+b=-1 \\ -2a+b=-4 \end{cases}$; $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$.

Убедимся, что уравнение $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = 0$ не имеет других корней. Разложим его левую часть на множители: $(x - 1)(x + 2)(x^2 + 1) = 0$. Видим, что последний множитель не обращается в 0, поэтому других корней уравнение не имеет.

Вернемся к решению неравенства. Запишем его в виде: $(x - 1)(x + 2)(x^2 + 1) \le 0$. Метод интервалов дает решение [-2; 1], то есть условие задачи выполнено.

Ответ: $a = 1$, $b = -2$.