Тема № 16 «Иррациональные уравнения».

Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком корня. К простейшим иррациональным уравнениям относят уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ *и* $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.

Способы решения иррационального уравнения

I. Переход к рациональному алгебраическому уравнению, которое либо равносильно исходному уравнению, либо является его следствием.

1) Если обе части иррационального уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень и освободиться от радикалов, то получится уравнение, равносильное исходному.

   При возведении уравнения в четную степень, получается уравнение, которое является следствием исходного. Так как при возведении в чётную степень чисел, равных по абсолютной величине, но разных по знаку, получается один и тот же результат, то возможно появление посторонних решений уравнения, но невозможна потеря корней.

   Так как могут появиться посторонние корни, то необходимо делать проверку, подставляя найденные значения неизвестной в первоначальное уравнение.

2) От иррационального уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ можно перейти к равносильной ему системе: $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

   От иррационального уравнения вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ можно перейти к одной из равносильных ему систем:

   $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$ или $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$

   Неравенство $g(x) \geq 0$ (или $f(x) \geq 0$) в этих системах выражает условие, при котором уравнение можно возводить в чётную степень, отсекает посторонние решения и позволяет обходиться без проверки.

II. Введение новой переменной.

Если в уравнении неоднократно встречается некоторое выражение, зависящее от неизвестной величины, то имеет смысл обозначить это выражение какой-нибудь новой переменной и попытаться решить уравнение сначала относительно введённой неизвестной, а затем уже найти исходную неизвестную.

III. Метод сведения к эквивалентным системам рациональных уравнений.

Уравнения вида $\sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d} = p$, где где *a, b,* с**,** *d* — некоторые числа, часто удаётся решить при помощи введения двух вспомогательных неизвестных: $y = \sqrt{ax+b}, z = \sqrt{cx+d}$, где $y \geq 0$, $z \geq 0$, и последующего перехода к эквивалентной системе рациональных уравнений. Полученное уравнение будет содержать две неизвестных, которые зависят одна от другой посредством старой переменной x. С помощью преобразований можно получить систему двух уравнений относительно двух неизвестных y и z.

IV. Использование свойства монотонности функций.

Если уравнение имеет вид: f(x) = 0, где f(x) возрастает (убывает), или f(x) = g(x), где f(x) и g(x) «встречно монотонны», то есть f(x) возрастает, а g(x) убывает или наоборот, то такое уравнение имеет не более одного корня. Если удаётся привести уравнение к такому виду и найти корень, то он и будет решением данного уравнения. Во многих случаях корень такого уравнения удобно находить подбором.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{2x-3}=\sqrt{x-2}$.

1) 1 2) 3/2; 2 3) нет решений 4) другой ответ

Решение. Возведя обе части в квадрат, получим 2x – 3 = x – 2 $\Rightarrow$ x = 1.
Чтобы не тратить время на нахождение ОДЗ уравнения (заметим, что это будет пересечение решений системы неравенств 2x – 3 ≥ 0 и x – 2 ≥ 0), достаточно сделать проверку: 2 – 3 = 1 – 2 = – 1 < 0, поэтому решений нет.

Ответ 3.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{3x+5}=-2$.

1) – 1/3 2) – 5/3 3) нет решений 4) другой ответ

Решение. Левая часть уравнения положительна, а правая отрицательна, т.е. $\sqrt{3x+5}\geq 0, -2<0$ $\Rightarrow$ решений нет.

Ответ 3.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+5}=-1$.

1) – 3 2) – 5 3) нет решений 4) другой ответ

Решение. Левая часть уравнения всегда неотрицательна, а правая – отрицательная, т.е. $\sqrt{x+1}\geq 0, \sqrt{x+3}\geq 0, \sqrt{x+5}\geq 0, -1<0$ $\Rightarrow$ решений нет.

Ответ 3.

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{x-15}-\sqrt{12-x}=3$.

1) 16 2) нет решений 3) 40; 8 4) другой ответ

Решение. В данном случае мы быстрее получим ответ, если сначала найдем ОДЗ уравнения: $\begin{cases} x-15\geq 0, \\ 12-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 15, \\ x\leq 12 \end{cases}$. Так как нет пересечения решений системы, то решений нет.

Ответ 2.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{3+\sqrt{x-1}}=1$.

1) нет решений 2) 5 3) 1 4) другой ответ

Решение. Так как левая часть больше единицы: $\sqrt{x-1}\geq 0, \sqrt{3+\sqrt{x-1}}\geq 1{,}7$, а правая часть равна единице, то решений нет.

Ответ 1.

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt{4x^2+5x-2}=2$.

1) – 2 2) ¾ 3) другой ответ 4) – 2; ¾

Решение. Так как правая часть уравнения положительна, то возведем в квадрат обе части уравнения: $4x^2 + 5x - 2 = 4$; $4x^2 + 5x - 6 = 0$; $x_1x_2 = -24$; $x_1 + x_2 = -5$.

Подберем корни $ax_1 = -8$; $ax_2 = 3$, тогда $x_1 = -8/4 = -2$; $x_2 = ¾$.

Проверкой убеждаемся, что оба корня подкоренное выражение не делают отрицательным: $16 - 10 - 2 > 0$ и $9/4 + 15/4 - 2 > 0$.

Ответ: 4.

Пример 7. Сократить дробь $\dfrac{a-\sqrt{a}-2}{2-\sqrt{a}}$

Решение. Замена: $\sqrt{a} = t$, тогда $a = t^2$, получим в числителе квадратный трехчлен относительно переменной t: $t^2 - t - 2$, который разложив на множители, используя 2-е следствие теоремы Виета, имеет вид: $t^2 - t - 2 = (t + 1)(t - 2)$. Тогда сократим дробь:

$$\frac{t^2-t-2}{2-t}=\frac{(t+1)(t-2)}{-(t-2)}=-t-1$$

Обратная замена $-\sqrt{a} - 1$.

Ответ $-\sqrt{a} - 1$.

Пример 8. Решить уравнение $\sqrt[3]{x^2+14x-16}=-4$.

1) – 8 2) – 6 3) другой ответ 4) – 8; – 6

Решение. Возведем в куб обе части уравнения: $x^2 + 14x - 16 = -64$; $x^2 + 14x + 48 = 0$; $x_1x_2 = 48$; $x_1 + x_2 = -14$, откуда $x_1 = -8$; $x_2 = -6$.

Ответ: 4.

Пример 9. Решить уравнение $\sqrt{x^2+4x-5}=4x-8$.

1) 23/15 2) 3 3) другой ответ 4) 23/15; 3

Решение. Корни должны удовлетворять условию $4x - 8 \geq 0$, то есть $x \geq 2$. Возведем обе части в квадрат: $x^2 + 4x - 5 = 16x^2 - 64x + 64$, $15x^2 - 68x + 69 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = 23/15 < 2$ - посторонний корень.

Ответ: 2.

Пример 10. Решить уравнение $2\sqrt{x^2-7x+19}+x^2-7x+4=0$.

Решение. Поскольку неизвестное входит в подкоренное выражение и в рациональную часть уравнения в виде одной и той же комбинации $(x^2 - 7x)$, можно сделать замену:

$t=\sqrt{x^2-7x+19}$ $(t \geq 0)$, тогда $x^2 - 7x = t^2 - 19$, и t определяется из уравнения:

$2t + t^2 - 19 + 4 = 0$, $t^2 + 2t - 15 = 0$, $t_1 = 3$, $t_2 = -5 < 0$ – не соответствует условию на знак t.

Обратная замена: $\sqrt{x^2-7x+19}=3$, $x^2-7x+19=9$, $x^2-7x+10=0$, $x_1=2$, $x_2=5$.

Ответ: x = 2, x = 5.

Замечание. Замена переменной очень полезна при решении иррациональных уравнений. Часто с ее помощью удается избежать необходимости возведения в квадрат.

Пример 11. Решить уравнение $\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}+4\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}=5$.

Решение. Подкоренные выражения – взаимно обратные дроби, поэтому замена $t=\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$ $(t\geq 0)$ приводит к уравнению $t+\frac{4}{t}=5, t^2-5t+4=0, t_1=1, t_2=4$.

Случай 1. $\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}=1, \frac{x+1}{1-x}=1, x+1=1-x, x=0$.

Случай 2. $\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}=4, \frac{x+1}{1-x}=16, x+1=16-16x, x=\frac{15}{17}$.

Ответ: $x=0, x=\frac{15}{17}$.

Замечание. Следует обратить внимание на то, что в некоторых заданиях нет необходимости в проверке корней или задании каких-либо ограничений: значения *x* определяются из условия, что корень принимает некоторое неотрицательное значение.

Пример 12. Решить уравнение $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}=2$.

Решение. В этом уравнении замена $t=\sqrt{x-4}$ $(t\geq 0)$ поможет ограничиться только одним возведением в квадрат: $x=t^2+4; \sqrt{t^2+1}+t=2, \sqrt{t^2+1}=2-t, \begin{cases} t^2+1=4-4t+t^2 \\ 0\leq t\leq 2 \end{cases},$

$$4t=3, t=\frac{3}{4}, x=\frac{9}{16}+4=\frac{73}{16}.$$

Ответ: $x=\frac{73}{16}$.

Пример 13. Решить уравнение $(x+6)\sqrt{36+10x-x^2}=x^2-36$.

Решение. ОДЗ задается условием: $36+10x-x^2\geq 0, 5-\sqrt{61}\leq x\leq 5+\sqrt{61}$. Запишем уравнение в виде: $(x+6)\sqrt{36+10x-x^2}=(x-6)(x+6), (x+6)(\sqrt{36+10x-x^2}-(x-6))=0$.

$x+6=0, x=-6<5-\sqrt{61}$ – посторонний корень.

$\sqrt{36+10x-x^2}-(x-6)=0, \sqrt{36+10x-x^2}=x-6, \begin{cases} 36+10x-x^2=x^2-12x+36 \\ x-6\geq 0 \end{cases},$

$\begin{cases} x^2-11x=0 \\ x\geq 6 \end{cases}, x=11$ (корень первого уравнения $x=0$ не удовлетворяет второму условию). Итак, единственный корень исходного уравнения $x=11$.

Ответ: x = 11.

Пример 14. Решить уравнение $\sqrt{2x+1}+\frac{3}{\sqrt{2x+1}}=4$.

Решение. Сделаем замену: $t=\sqrt{2x+1}, t\geq 0$ и решим уравнение относительно переменной t: $t+\frac{3}{t}=4, \quad t^2-4t+3=0, \quad t_1=1, \quad t_2=3$.

После обратной замены получим:

$a)$ $\sqrt{2x+1}=1, \quad 2x+1=1, \quad x=0$

b) $\sqrt{2x+1} = 3 \quad 2x + 1 = 9, \quad x = 4$

Ответ: x = 0, x = 4.