Тема № 15 «Уравнения и неравенства с модулем».

Модуль действительного числа — это абсолютная величина этого числа. Проще говоря, при взятии модуля нужно отбросить от числа его знак. Обозначается $|a|$.
Например, |6| = 6, |-3| = 3, |-10,45| = 10,45

Определение модуля

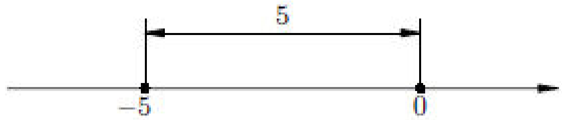
$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Свойства модуля

1) Модули противоположных чисел равны $|a| = |-a|$.
2) Квадрат модуля числа равен квадрату этого числа $|a|^2 = a^2$.
3) Квадратный корень из квадрата числа есть модуль этого числа $\sqrt{(a^2)} = a^2$.
4) Модуль числа есть число неотрицательное $|a| \geq 0$.
5) Постоянный положительный множитель можно выносить за знак модуля $|ca| = c|a|, c > 0$.
6) Если $|a| = |b|$, то $a = \pm b$.
7) Модуль произведения двух (и более) чисел равен произведению их модулей $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

Геометрический смысл модуля

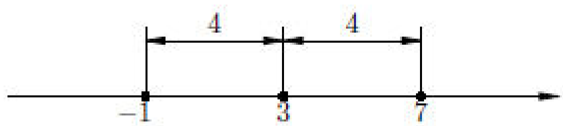
Модуль числа — это расстояние от нуля до данного числа.
Например, **|-5| = 5**. То есть расстояние от точки **-5** до нуля равно **5**.



Рассмотрим простейшее уравнение |x| = 3. Мы видим, что на числовой прямой есть две точки, расстояние от которых до нуля равно трём. Это точки 3 и -3. Значит, у уравнения |x| = 3 есть два решения: x = 3 и x = -3.

Геометрический смысл модуля разности величин — это расстояние между ними. Например, геометрический смысл выражения $|x - a|$- длина отрезка координатной оси, соединяющего точки с абсциссами x и a.

Пример 1. Решить уравнение **|x — 3| = 4**.
Решение. Это уравнение можно прочитать так: расстояние от точки x до точки 3 равно 4. С помощью графического метода можно определить, что уравнение имеет два решения: – 1 и 7.



Ответ – 1; 7.

Пример 2. Решить неравенство: **|x + 7| < 4**.

Решение. Можно прочитать как: расстояние от точки **x** до точки **– 7** меньше четырёх.

Ответ: (-11; -3).

Пример 3. Решить неравенство: **|10 — x| ≥ 7**.

Решение. Расстояние от точки 10 до точки х больше или равно семи.

Ответ: (-∞; 3]υ [17, +∞)

Замечание. Перевод алгебраической задачи на геометрический язык часто позволяет избежать громоздких выкладок.

Пример 4. Решить уравнение |x – 1| + |x – 2| = 1.
Решение. Будем рассуждать следующим образом: исходя из геометрической интерпретации модуля, левая часть уравнения представляет собой сумму расстояний от некоторой точки с абсциссой *x* до двух фиксированных точек с абсциссами 1 и 2. Тогда очевидно, что все точки с абсциссами из отрезка [1; 2] обладают требуемым свойством, а точки, расположенные вне этого отрезка — нет. Отсюда ответ: множество решений уравнения есть отрезок [1; 2] .
Ответ [1; 2].

Пример 5. Решить уравнение |x – 1|– |x – 2| = 1.
Решение. Рассуждая аналогично, получим, что разность расстояний до точек с абсциссами 1 и 2 равна единице только для точек, расположенных на координатной оси правее числа 2. Тогда ответ — луч [2; + ∞) .
Ответ [2; + ∞) .

Пример 6. Решить неравенство | *x* + 1| + | *x* −1|> 2 .
Решение. Изобразим на координатной прямой точки, сумма расстояний от которых до точек –1 и 1 в точности равна 2. Это все точки отрезка [−1; 1] . Очевидно, что для всех чисел вне данного отрезка сумма расстояний будет больше двух, откуда ответ:
(−∞; −1) ⍰ (1; + ∞) .
Ответ (−∞; −1) ⍰ (1; + ∞) .

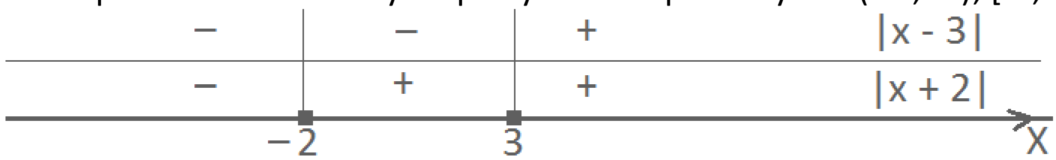
Замечание: *обобщением* решения вышеприведенных уравнений являются следующие равносильные переходы:

|x – a| + |x – b| = b – a, b ≥ a, a ≤ x ≤ b
|x – a| – |x – b| = b – a, b ≥ a, x ≥ b

Уравнения с модулем.

Пример 7. Решить уравнение $2|x+2|+|x-3|=7-2x$.

Решение. Найдем корни подмодульных выражений: $x+2=0$, $x=-2$; $x-3=0$, $x=3$. Полученные числа разбивают числовую прямую на 3 промежутка: $(-\infty; -2)$, $[-2; 3)$, $[3; +\infty)$,



на каждом из которых оба подмодульных выражения не обращаются в 0 и, соответственно, сохраняют постоянный знак. Следовательно, на каждом из найденных промежутков можно заменить модули либо подмодульными выражениями, либо выражениями, противоположными им, и свести задачу к решению обычных линейных уравнений, равносильных исходному уравнению на каждом из рассматриваемых интервалов:

a) при $x<-2$ $x+2<0$, $x-3<0$, поэтому по определению модуля $|x+2| = -x-2$, $|x-3| = -x+3$. Следовательно, исходное уравнение можно записать в виде: $-2x-4-x+3=7-2x$, откуда $x=-8$. Это значение принадлежит интервалу $(-\infty; -2)$, то есть является решением первоначального уравнения.

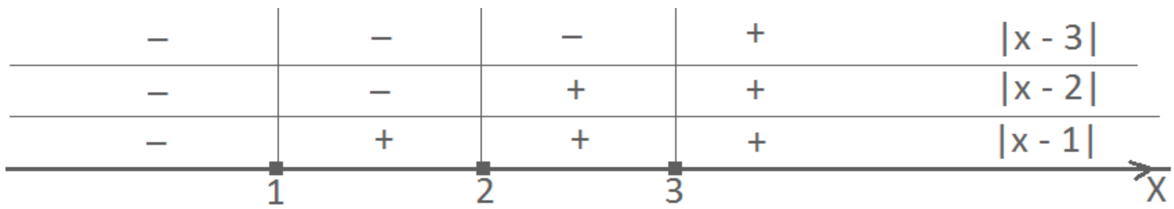
b) для $-2 \le x < 3$ $x+2 \ge 0$, $x-3<0$. Тогда $|x+2| = x+2$, $|x-3| = -x+3$. Уравнение принимает вид: $2x+4-x+3=7-2x$, $x=0$ – значение, лежащее на промежутке $[-2; 3)$.

c) если $x \ge 3$, оба подмодульных выражения неотрицательны, и требуется решить уравнение $2x+4+x-3=7-2x$. Его корень $x = 6/5$ не принадлежит промежутку $[3; +\infty)$, то есть не является решением исходного уравнения.

Ответ: $x=-8$, $x=0$.

Пример 8. Решить уравнение $|x-1|+|x-3|=2|x-2|$.

Решение. Знаки подмодульных выражений на интервалах числовой прямой распределяются так:



Решим уравнение на каждом промежутке:

a) $x<1$, $-x+1-x+3=-2x+4$, $4=4$ – уравнение превратилось в тождество, верное для любого $x<1$.

b) $1 \le x < 2$, $x-1-x+3=-2x+4$, $x=1$ – число, принадлежащее рассматриваемому промежутку.

c) $2 \le x < 3$, $x-1-x+3 = 2x-4$, $x=3$ – не входит в рассматриваемый промежуток.

d) $x \ge 3$, $x-1+x-3=2x-4$, $-4=-4$ – тождество, то есть все $x \ge 3$ являются решениями уравнения.

Ответ: $x \le 1$, $x \ge 3$.

Пример 9. Решить уравнение $x^2-6x+6+|x-6|=0$.

Решение. Рассмотрим две возможности.

1) $x-6 \ge 0$, то есть $x \ge 6$.

Тогда | $x - 6$ | = $x - 6$, и уравнение принимает вид: $x^2 - 6x + 6 + x - 6 = 0$, $x^2 - 5x = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 0$. Видим, что оба корня не соответствуют условию, поставленному на знак подмодульного выражения, следовательно, являются посторонними.

2) $x - 6 < 0$, $x < 6$; $x^2 - 6x + 6 - x + 6 = 0$, $x^2 - 7x + 12 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ – оба корня соответствуют поставленному условию.

Ответ: x = 3, x = 4.

Пример 10. Решим уравнение: $x^2 + 2x - 3|x + 1| + 3 = 0$.

Решение. Запишем уравнение несколько иначе:

$(x^2 + 2x + 1) - 3|x + 1| + 2 = 0$, или ($(x + 1)^2 - 3|x + 1| + 2 = 0$.

Поскольку $|f(x)|^2 = f^2(x)$, то имеем уравнение $|x + 1|^2 - 3|x + 1| + 2 = 0$.

Положим $|x + 1| = t$, тогда $t^2 - 3t + 2=0$. Так как $t_1=1$ и $t_2=2$, то имеем совокупность уравнений: $\left[\begin{array}{l} |x + 1| = 1, \\ |x + 1| = 2. \end{array}\right.$

Очевидно, что x=0 и x=-2 (это корни первого уравнения совокупности); x=1 и x=-3 (это корни второго уравнения совокупности). Таким образом, корни данного уравнения $x_1=-3$, $x_2=-2$, $x_3=0$ и $x_4=1$.

Ответ: $x_1=-3$, $x_2=-2$, $x_3=0$, $x_4=1$.

Замечание. Процесс решения можно сократить в том случае, когда неизвестное входит только в подмодульное выражение. При этом обычно нет надобности исследовать знак этого выражения, так как его значение ограничивается конкретными числами.

Пример 11. Решить уравнение | $x^2 + 2x - 16$| = 8.

Решение. Выражение, модуль которого равен 8, может принимать только два значения: 8 и – 8.

$x^2 + 2x - 16 = 8$, $x^2 + 2x - 24 = 0$, $x_1 = -6$, $x_2 = 4$.

$x^2 + 2x - 16 = -8$, $x^2 + 2x - 8 = 0$, $x_3 = -4$, $x_4 = 2$.

Отметим, что при таком способе решения не требуется проверка корней, так как среди них не может быть посторонних – при каждом из найденных значений x модуль выражения $x^2 + 2x - 16$ равен 8.

Ответ: x = - 6, x = - 4, x = 2, x = 4.

Пример 12. Решить уравнение | $x^2 - 3x + 3$ | = | $2x - 3$|.

Решение. Равенство | a | = | b | верно в двух случаях: a = b или a = - b. Применим это утверждение к решению уравнения:

$x^2 - 3x + 3 = 2x - 3$, $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

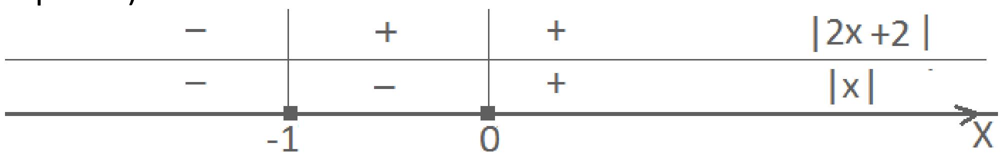
$x^2 - 3x + 3 = -2x + 3$, $x^2 - x = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

Выбранный способ решения не приводит к появлению посторонних корней.

Ответ: x = 0, x = 1, x = 2, x = 3.

Замечание. Решением уравнения может оказаться не конечный набор чисел, а непрерывный промежуток. Кроме того, вы можете включать точку, разделяющую интервалы, в любой из соседних промежутков – если она не является решением уравнения, то ее включение в выбранный интервал не изменит набора корней, а если является, то этот корень обязательно получится в каждом из уравнений, к которым сводится исходное уравнение на соседних интервалах, и, соответственно, войдет в ответ.

Пример 13. Решить уравнение $|2x + 2| - |x| = x + 2$.
Решение. Найдем корни подмодульных выражений: x = - 1 и x = 0 – и определим знаки этих выражений на интервалах (- ∞; - 1), (- 1; 0) и (0; + ∞) (для этого достаточно подставить в каждое подмодульное выражение вместо x какое-нибудь число из выбранного интервала):



Раскроем на каждом интервале оба модуля с учетом знака подмодульных выражений:
$\begin{cases} x < -1 \\ -2x - 2 + x = x + 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x < -1 \\ x = -2 \end{cases}$. Найденный корень располагается на заданном интервале, следовательно, входит в ответ.
$\begin{cases} -1 \le x < 0 \\ 2x + 2 + x = x + 2 \end{cases}$, $\begin{cases} -1 \le x < 0 \\ x = 0 \end{cases}$. Точка 0 не включена в интервал, поэтому корень оказался посторонним.
$\begin{cases} x \ge 0 \\ 2x + 2 - x = x + 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x \ge 0 \\ x + 2 = x + 2 \end{cases}$. Видим, что на этом промежутке уравнение превратилось в тождество, то есть его решением является любое значение x из рассматриваемого промежутка.
Ответ: x = - 2, x ≥ 0.

Пример 14. Решить уравнение $x^2 - 6x + |x - 3| - 3 = 0$.
Решение. Заметим, что $x^2 - 6x = (x^2 - 6x + 9) - 9 = (x - 3)^2 - 9 = |x - 3|^2 - 9$.
Введем новое неизвестное $t = |x - 3|$ $(t \ge 0)$,
тогда для t требуется решить уравнение $t^2 - 9 + t - 3 = 0$,
$t^2 + t - 12 = 0$, $t_1 = 3$, $t_2 = -4 < 0$ – посторонний корень.
Следовательно, $|x - 3| = 3$,
$x - 3 = \pm 3$, $x_1 = 0$, $x_2 = 6$.
Ответ: 0, 6.

Неравенства с модулем

Стандартный путь решения неравенств с модулем заключается в том, что координатная прямая разбивается на промежутки (границами этих промежутков являются нули подмодульных выражений), а затем неравенство решается на каждом из промежутков.
Рассмотрим неравенство $|f(x)| \le g(x)$. Очевидно, что те x, для которых $g(x) < 0$, не являются решениями. Значит, если x является решением, то для него $g(x) \ge 0$, и согласно

геометрическому смыслу модуля, как расстоянию на координатной оси, данное неравенство равносильно системе $-g(x) \le f(x) \le g(x)$. Таким образом, имеем

$$|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x) \end{cases} \Leftrightarrow -g(x) \le f(x) \le g(x)$$

Аналогично рассматривают неравенство $|f(x)| \ge g(x)$. Неравенство выполнено для тех x, для которых g (x) < 0 и функции f (x) и g (x) определены. Для тех x, для которых g (x) ≥ 0, имеем равносильную совокупность $\left[\begin{array}{l} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x) \end{array}\right.$

$$|f(x)| \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0 \text{ при } x \in D_f \cap D_g \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ -g(x) \le f(x) \le g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример 15. Решить неравенство $|x + 5| + |2x - 3| < 10$.

Решение. Корни подмодульных выражений: $x = -5$ и $x = 1{,}5$. Расставим знаки этих выражений на полученных интервалах:

	$x < -5$	$-5 < x < 1{,}5$	$x > 1{,}5$
$\lvert 2x - 3\rvert$	−	−	+
$\lvert x + 5\rvert$	−	+	+

Точки на оси X: −5, 1,5.

Последовательно решим три системы неравенств:

$\begin{cases} x < -5 \\ -x - 5 - 2x + 3 < 10' \end{cases}$ $\begin{cases} x < -5 \\ x > -4 \end{cases}$ - интервалы не пересекаются, решений нет.

$\begin{cases} -5 \le x < 1{,}5 \\ x + 5 - 2x + 3 < 10' \end{cases}$ $\begin{cases} -5 \le x < 1{,}5 \\ x > -2 \end{cases}$, $-2 < x < 1{,}5$.

$\begin{cases} x \ge 1{,}5 \\ x + 5 + 2x - 3 < 10' \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 1{,}5 \\ x < \frac{8}{3} \end{cases}$, $1{,}5 \le x < \frac{8}{3}$.

Объединим найденные решения: $-2 < x < \frac{8}{3}$.

Ответ: $\left(-2; \frac{8}{3}\right)$

Пример 16. Решить неравенство: $|3x - 1| + |2x - 3| - |x + 5| < 2$.

Решение. Раскроем модули.

	$x < -5$	$-5 < x < 1/3$	$1/3 < x < 2/3$	$x > 2/3$
$\lvert x + 5\rvert$	−	+	+	+
$\lvert 2x - 3\rvert$	−	−	−	+
$\lvert 3x - 1\rvert$	−	−	+	+

Точки на оси X: -5, 1/3, 2/3.

Таким образом, имеем:

1) $\begin{cases} -3x + 1 - 2x + 3 + x + 5 < 2, \\ x \le -5 \end{cases}$ или $\begin{cases} -4x + 7 < 0 \\ x \le -5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -3x+1-2x+3-x-5<2, \\ -5 \le x \le \frac{1}{3} \end{cases}$ или $\begin{cases} -6x-3<0, \\ -5 \le x \le \frac{1}{3} \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x-1-2x+3-x-5<2, \\ \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3} \end{cases}$ или $\begin{cases} -5<0, \\ \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3} \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x-1+2x-3-x-5<2, \\ x \ge \frac{2}{3} \end{cases}$ или $\begin{cases} 4x-11<0, \\ x \ge \frac{2}{3} \end{cases}$

Решение неравенства свелось к решению совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} x > \frac{7}{4}, \\ x \le -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -\frac{1}{2}, \\ -5 \le x \le \frac{1}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} -5 < 0 \\ \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \frac{11}{4} \\ x \ge \frac{2}{3} \end{cases}$$

Следовательно, решение данного неравенства:

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{11}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{4}\right)$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{4}\right)$.

Пример 17. Решить неравенство $\left|\frac{2-x}{3x+1}\right| > 1.$

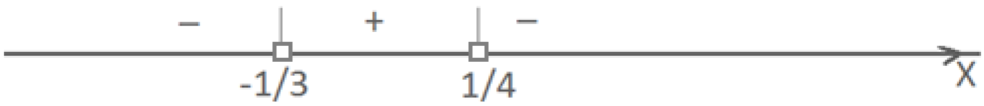
1) $\left(-\frac{7}{2};-\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{6};\frac{1}{5}\right)$ 2) $\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{6}\right) \cup \left(-\frac{1}{7};1\right)$

3) $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)$ 4) $\left(-1;-\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{4};2\right)$

Решение. Неравенство $|a| > 1$ сводится к совокупности неравенств $a > 1$ и $a < -1$. Рассмотрим каждый случай отдельно:

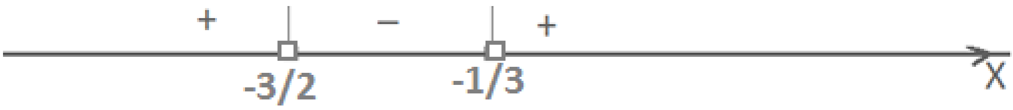
$$1) \quad \frac{2-x}{3x+1} > 1, \quad \frac{2-x}{3x+1} - 1 > 0, \quad \frac{1-4x}{3x+1} > 0.$$

Применим метод интервалов:



Итак, решением для этого случая является интервал $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)$.

$$2) \quad \frac{2-x}{3x+1} < -1, \quad \frac{2-x}{3x+1} + 1 < 0, \quad \frac{2x+3}{3x+1} < 0.$$



С помощью метода интервалов получаем решение: $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{3}\right)$.

Объединяя оба решения, находим окончательный ответ: $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)$ (ответ 3).

Ответ: 3.

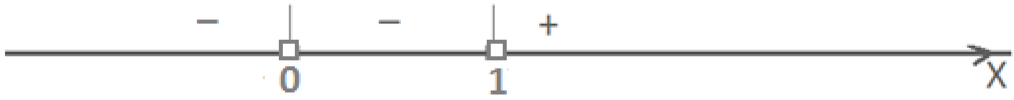
Теорема о знаках.
Знак разности модулей двух выражений совпадает со знаком разности квадратов этих выражений.

Пример 18. Решить неравенство: $\dfrac{|x^3+x-1|-|x^3-x+1|}{|x-1|-|x+1|} \ge 0$

Решение. $\dfrac{|x^3+x-1|-|x^3-x+1|}{|x-1|-|x+1|} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x^3+x-1)^2-(x^3-x+1)^2}{(x-1)^2-(x+1)^2} \ge 0$

Используя формулу разности квадратов, разложим числитель и знаменатель на множители и решим полученное рациональное неравенство:

$\Leftrightarrow \dfrac{(x^3+x-1-x^3+x-1)(x^3+x-1+x^3-x+1)}{(x-1-x-1)(x-1+x+1)} \ge 0 \Leftrightarrow$



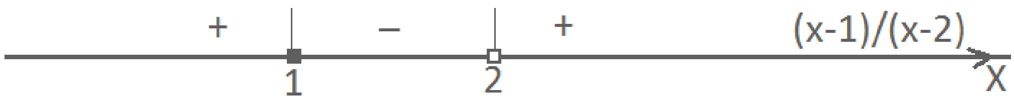
Ответ (–∞; 0) ∪(0; 1).

Пример 19. Решить неравенство: $\left|\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+4}\right| + \left|\dfrac{x-1}{x-2}\right| - 12 < 0$.

Решение. Пусть $\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right| = t$, тогда $t^2+t-12<0$, имеем $(t+4)(t-3)<0$.

Решение последнего неравенства интервал (-4, 3). Таким образом, решение данного неравенства сводится к решению двойного неравенства: $-4 < \left|\dfrac{x-1}{x-2}\right| < 3.$

Поскольку $-4 < \left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|$ при всех допустимых значениях *x*, то осталось решить лишь неравенство $\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right| < 3.$ Отметим на числовой прямой x=1 – точку, зануляющую подмодульное выражение и *x=2* – точку, в которой подмодульное выражение не существует. Расставим знаки подмодульного выражения в каждом из трех полученных промежутков.



Т.о., имеем два случая:

1) $\dfrac{x-1}{x-2} < 3$ если x ≤ 1 или x> 2; 2) $\dfrac{1-x}{x-2} < 3,$ если 1 ≤ x < 2.

Решение неравенства сводится, таким образом, к решению совокупности систем:

$$\begin{cases} \dfrac{-2x+5}{x-2} < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x \le 1, \\ x \ge 2 \end{array}\right. \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{-4x+7}{x-2} < 0, \\ 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Решение первой системы: $(-\infty,1] \cup \left(\dfrac{5}{2},+\infty\right).$ Решение второй системы: $\left[1,\dfrac{7}{4}\right).$ Таким образом, решение данного неравенства: $\left(-\infty,\dfrac{7}{4}\right) \cup \left(\dfrac{5}{2},+\infty\right).$

Ответ: $\left(-\infty,\dfrac{7}{4}\right) \cup \left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$

Пример 20. Решить неравенство $|\,|2x-3| - 7\,| > 6$.

Решение. Из неравенства | a | > b (при b > 0) следует, что a > b или a < - b. Рассмотрим эти случаи отдельно:

А) | 2x – 3 | - 7 > 6, | 2x – 3 | > 13, $\left[\begin{array}{l} 2x-3>13 \\ 2x-3<-13 \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} x>8 \\ x<-5 \end{array}\right.$.

Б) | 2x – 3 | - 7 < - 6, | 2x – 3 | < 1. Вспомним, что неравенство | a | < b выполняется, если - b < a < b. Соответственно – 1 < 2x – 3 < 1, 2 < 2x < 4, 1 < x < 2.
Окончательным ответом будет объединение полученных решений.
Ответ: (- ∞; - 5)U(1; 2)U(8; + ∞).