Тема № 14 «Алгебраические уравнения и системы нелинейных уравнений».

Многочленом степени n называется многочлен вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – заданные числа, $a_0 \neq 0$, $n \in N$,

a_0x^n – старший член многочлена

n – степень многочлена

a_n – свободный член многочлена.

Алгебраическим уравнением n-й степени называется уравнение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

Теорема Безу. Если уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ с целыми коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, где $a_n \neq 0$, имеет целый корень, то этот корень является делителем числа a_n (свободного члена уравнения).

Пример 1. $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$x^3 + 4x^2 - x - 4 = x^2(x + 4) - (x + 4) = (x^2 - 1)(x + 4)$.

Тем самым уравнение приведено к виду $(x^2 - 1)(x + 4) = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -4$.

Ответ: x = 1, x = -1, x = -4.

Замечание. Если группировка не получается, можно попытаться найти хотя бы один корень подбором, а затем разделить левую часть уравнения на разность $x - x_0$, где x_0 – найденный корень. Напомним, что в уравнении с целыми коэффициентами все целочисленные корни являются делителями свободного члена.

Пример 2. Решить уравнение $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$.

Решение. 1-й способ:

Рациональные корни уравнения найдем среди делителей свободного члена, равного 6: ±1; ±2; ±3; ±6.

Проверим являются ли они делителями по ***схеме Горнера***.

	1	-4	1	6	
-1	1	-5	6	0	**корень**
1	1	-3	-2	4	не корень
-2	1	-6	13	-20	не корень
2	1	-2	-3	0	**корень**
-3	1	-7	22	-60	не корень
3	1	-1	-2	0	**корень**
-6	1	-10	61	...	не корень
6	1	2	13	...	не корень

Итак, $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x - 2)(x - 3) = 0$ при x = -1, x = 2, x = 3.

2-й способ:

Один из корней можно подобрать (или угадать), например, при x = 2:

$$2^3 - 4\cdot 2^2 + 2 + 6 = 0.$$

Выполним деление:

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^3 - 4x^2 + x + 6 & x - 2 \\
 & \underline{x^3 - 2x^2} & x^2 - 2x - 3 \\
 & - \;\; -2x^2 + x + 6 & \\
 & \underline{-2x^2 + 4x} & \\
 & - \;\; -3x + 6 & \\
 & \underline{-3x + 6} & \\
 & 0 &
\end{array}$$

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 2)(x^2 - 2x - 3) = 0$, причем корни уравнения $x^2 - 2x - 3 = 0$ по 2-му следствию теоремы Виета $x_1 = -1$; $x_2 = 3$.

Ответ -1; 2; 3.

Пример 3. Найти рациональные корни уравнения $2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$.

Решение. Рациональные корни уравнения найдем среди делителей свободного члена, равного 2: ±1; ±2.

Проверим, являются ли они корнями по схеме Горнера.

	2	1	-6	1	2	
-1	2	-1	-5	6	-4	не корень
1	2	3	-3	-2	0	**корень**
-2	2	-3	0	1	0	**корень**
2	2	5	4	9	20	не корень

$$\begin{array}{rl|l}
- & 2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 & x - 1 \\
 & \underline{2x^4 - 2x^3} & 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 \\
 & - \;\; 3x^3 - 6x^2 & \\
 & \underline{3x^3 - 3x^2} & \\
 & - \;\; -3x^2 + x & \\
 & \underline{-3x^2 + 3x} & \\
 & - \;\; -2x + 2 & \\
 & \underline{-2x + 2} & \\
 & 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl|l}
- & 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 & x + 2 \\
 & \underline{2x^3 + 4x^2} & 2x^2 - x - 1 \\
 & - \;\; -x^2 - 3x & \\
 & \underline{-x^2 - 2x} & \\
 & - \;\; -x - 2 & \\
 & \underline{-x - 2} & \\
 & 0 &
\end{array}$$

$2x^2 - x - 1 = 2(x - 1)(x + ½\ )$.

Итак, $2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 = 2(x + 2)(x - 1)^2(x + ½\ ) = 0$ при $x = -2$; $x = 1$; $x = -½$.

Ответ -2; 1; -½ .

Пример 4. $x^3 + 8x^2 + 19x + 12 = 0$.

Решение. Выпишем все делители числа 12: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12. Очевидно, что уравнение не может иметь положительных корней, так как при подстановке вместо *x* любого положительного числа левая часть примет положительное значение. Поэтому начнем поиск корней с числа – 1 и убедимся по схеме Горнера, что оно при подстановке в уравнение обращает его в верное равенство. Итак, $x_1 = -1$ – корень, найденный подбором. Разделим «уголком» левую часть уравнения на $x - 1$:

$(x^3 + 8x^2 + 19x + 12\ ):(x - 1) = (x^2 + 7x + 12)$.

Следовательно, уравнение можно записать в виде: $(x - 1)(x^2 + 7x + 12) = 0$,

откуда $x_2 = -3$, $x_3 = -4$.

Ответ: $x = -1$, $x = -3$, $x = -4$.

Пример 5. Сократить дробь: $\dfrac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{2x^3 - x^2 + 2x - 1}$.

Решение.

$$\frac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{2x^3 - x^2 + 2x - 1} = \frac{(x^3 - 3x^2) + (x - 3)}{(2x^3 - x^2) + (2x - 1)} = \frac{x^2(x - 3) + (x - 3)}{x^2(2x - 1) + (2x - 1)} = \frac{(x - 3)(x^2 + 1)}{(2x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{x - 3}{2x - 1}$$

Ответ (x – 3)/(2x – 1).

Пример 6. Решить систему уравнений $\begin{cases} xy = 1, \\ yz = 2, \\ xz = 8 \end{cases}$

Решение. 1-й способ:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x}, \\ \dfrac{z}{x} = 2, \\ xz = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x}, \\ z = 2x, \\ 2x^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x}, \\ z = 2x, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -2 \end{array}\right. \end{cases}$$

При x = 2, y = ½ , z = 4.

При x = –2, y =– ½ , z =–4.

2-й способ:

Перемножив уравнения, получим: $x^2 y^2 z^2 = 16$; $xyz = \pm 4$.

1) Если xyz = 4, то разделив это уравнение поочередно на каждое из уравнений исходной системы, получим: $\begin{cases} z = 4, \\ x = 2, \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

2) Если xyz =– 4, то разделив это уравнение поочередно на каждое из уравнений исходной системы, получим: $\begin{cases} z = -4, \\ x = -2, \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Ответ (–2; –½ ; –4), (2; ½ ; 4).

Пример 7. Решить уравнение $10x^3 + x^2 - 80 - \dfrac{8}{x} = 0$.

Решение. Область допустимых значений неизвестного задается условием $x \neq 0$.

Умножим обе части равенства на x: $10x^4 + x^3 - 80x - 8 = 0$ и разложим левую часть полученного уравнения на множители:

$x^3(10x + 1) - 8(10x + 1) = 0,\ (x^3 - 8)(10x + 1) = 0.$

$А)\ x^3 - 8 = 0,\ x^3 = 8,\ x = 2.$

$Б)\ 10x + 1 = 0,\ x = -0{,}1.$

Ответ: x = 2, x = -0,1.

Пример 8. Решить уравнение $4x^2+\frac{4}{x^2}+12x+\frac{12}{x}=47$

Решение. Принимая во внимание тождество $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+\frac{1}{a^2}+2$ перепишем данное уравнение в виде $4\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)-8+12\left(x+\frac{1}{x}\right)=47$

$$4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+12\left(x+\frac{1}{x}\right)-55=0$$

Замена: $x+\frac{1}{x}=t$,имеем: $4t^2+12t-55=0$, $t_1=-5{,}5$; $t_2=2{,}5$.

Обратная замена: $x+\frac{1}{x}=-5{,}5 \Leftrightarrow x^2+5{,}5x+1=0$, $x_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{105}}{4}$

$x+\frac{1}{x}=2{,}5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2{,}5x+1=0, \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+2=0, \\ x\neq 0 \end{cases}$. Используя теорему, обратную к теореме Виета, получим $x_3x_4=4$

$x_3+x_4=5$,

$ax_3=1$; $ax_4=4$, тогда корни $x_3=½$, $x_4=2$.

Ответ: 0,25(-11+√105); 0,25(-11 - √105); 0,5; 2.

Пример 9. Решить уравнение $(x+3)^4+(x+5)^4=16$.

Решение.

Полагая, что $\frac{x+3+x+5}{2}=\frac{2x+8}{2}=x+4=t$, получим: $(t-1)^4+(t+1)^4=16$.

Воспользуемся формулой:

$(a\pm b)^4=a^4\pm 4a^3b+6a^2b^2\pm 4ab^3+b^4$.

$t^4-4t^3+6t^2-4t+1+t^4+4t^3+6t^2+4t+1=16$,

$2t^4+12t^2-14=0|:2$ – это биквадратное уравнение, решается заменой $t^2=p$. Корни квадратного уравнения $p^2+6p-7=0$ $p_{1,2}=1; -7$.

Обратная замена: $t^2=1$; $t=\pm 1$; $x+4=1 \Rightarrow x_1=-3$; $x+4=-1 \Rightarrow x_2=-5$.

Ответ: -5; -3.

Пример 10. Решить уравнение $x^2+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=27$

Решение. Левая часть уравнения представляет собой сумму квадратов. Для решения уравнения, удобно превратить её в полный квадрат, добавив к обеим частям уравнения соответствующее удвоенное произведение:

$$x^2+\frac{9x^2}{(x+3)^2}-2x\frac{3x}{x+3}=27-2x\frac{3x}{x+3} \Leftrightarrow \left(x-\frac{3x}{x+3}\right)^2=27-6\frac{x^2}{x+3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2+6\frac{x^2}{x+3}-27=0$$

Замена: $\frac{x^2}{x+3}=t$, получим по теореме, обратной к теореме Виета, корни уравнения $t^2+6t-27=0$, $t_1=-9$, $t_2=3$.

Обратная замена: $\frac{x^2}{x+3} = -9 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 9x + 27 = 0, D < 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$

$$\frac{x^2}{x+3} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 9 = 0, \ x_{1,2} = \frac{3(1 \pm \sqrt{5})}{2} \\ x \neq -3 \end{cases}$$

Ответ $x_{1,2}=1{,}5(1\pm\sqrt{5})$.

Замечание. Метод введения новой переменной иногда называют методом замены переменной. Это не совсем правомерно. Введение новой переменной в уравнение отнюдь не предполагает обязательное исчезновение из уравнения старой переменной.

Пример 11. Решить равнение $(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 15x^2 = 0$.
Решение. Замена: $x^2 + x + 4 = t$. Получим: $t^2 + 8xt + 15x^2 = 0$.
Решив это уравнение как квадратное относительно t; получаем:

$$t_{1,2} = -4x \pm \sqrt{16x^2 - 15x^2} = -4x \pm |x| \Rightarrow t_1 = -3x, t_2 = -5x$$

Обратная замена: $\left[\begin{array}{l} x^2 + x + 4 = -3x, \\ x^2 + x + 4 = -5x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 4x + 4 = 0, \\ x^2 + 6x + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+2)^2 = 0, x = -2, \\ x^2 + 6x + 4 = 0, x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{5} \end{array}\right.$.

Ответ: $-2, -3 + \sqrt{5}, -3 - \sqrt{5}$.

Замечание. Другой особый случай использования метода введения новой переменной – введение нескольких новых неизвестных. В этом случае решение исходного уравнения сводится к решению системы уравнений относительно новых неизвестных.

Пример 12. Решить уравнение $(2 - x)^5 + (x - 3)^5 + 1 = 0$.
Решение. Пусть x_0 – корень уравнения. Пусть $u = 2 - x_0$ и $v = x_0 - 3$, тогда имеем систему уравнений: $\begin{cases} u + v = -1, \\ u^5 + v^5 = -1 \end{cases}$

Воспользуемся формулой
$u^5 + v^5 = (u + v)(u^4 + u^3v + u^2v^2 - uv^3 + v^4) = (u + v)(u^4 + v^4 - uv(u^2 + v^2) + u^2v^2) =$
$= (u+v)((u^2 + v^2)^2 - 2u^2v^2 - uv(u^2 + v^2) + u^2v^2) = (u+v)(((u+v)^2 - 2uv)^2 - 2u^2v^2 - uv((u + v)^2 - 2uv) + u^2v^2) = (u+v)(((u + v)^2 - 2uv)^2 - uv(u + v)^2 + u^2v^2)$.
Итак, $u^5 + v^5 = (u+v)(((u + v)^2 - 2uv)^2 - uv(u + v)^2 + u^2v^2)$.

$$\begin{cases} u + v = -1, \\ (u + v)(((u + v)^2 - 2uv)^2 - uv(u + v)^2 + u^2v^2 = -1. \end{cases}$$

Учитывая, что $u + v = -1$ из второго уравнения системы получаем:

$(1 - 2uv)^2 - uv + u^2v^2 = 1$;

$5(uv)^2 - 5uv = 0$;

$5uv(uv - 1) = 0 \Rightarrow uv=1$ или $uv=0$.

Для нахождения *u* и *v* имеем две системы уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u + v = -1, \\ uv = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} u + v = -1, \\ uv = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = -v - 1, \\ -v^2 - v - 1 = 0, D < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u = -v - 1, \\ -v^2 - v = 0, v_{1,2} = 0, -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Тогда u_1=0, при v_1=-1 и u_2=-1 при v_2=0.

Обратная замена: $u_1 = 2 - x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 2$ или $u_2 = 2 - x_0 = -1 \Rightarrow x_0 = 3$;

$v_1 = x_0 - 3 = -1 \Rightarrow x_0 = 2$ или $v_1 = x_0 - 3 = 0 \Rightarrow x_0 = 3$.

Итак, корни исходного уравнения: x_1=2, x_2=3.

Ответ: 2; 3.

Пример 13. $\frac{1}{x+4}+\frac{6}{x^2-16}-\frac{x^2+x}{x^3+64}=0.$

Решение. Зададим ОДЗ: $x+4\neq 0, x^2-16\neq 0, x^3+64\neq 0,$ откуда x = ±4.

Чтобы найти наименьший общий знаменатель трех дробей, разложим на множители второй и третий знаменатели:

$$x^2-16=(x-4)(x+4),\ x^3+64=x^3+4^3=(x+4)(x^2-4x+16).$$

Тогда наименьший общий знаменатель имеет вид: $(x-4)(x+4)(x^2-4x+16)$.

Умножим обе части уравнения на найденный общий знаменатель. Равенство при этом не нарушится, так как при условии, что x = ±4, то есть в рамках ОДЗ, общий знаменатель не равен 0.

После этого решим уравнение $(x-4)(x^2-4x+16)+6(x^2-4x+16)-(x^2+x)(x-4)=0.$

После упрощения получаем: $x^2 + 12x + 32 = 0$.

Корни этого уравнения: x_1 = - 8 и x_2 = - 4, но число – 4 не входит в ОДЗ. С учетом этого оказывается, что уравнение имеет единственное решение: x = 8.

Ответ: x = 8.

Пример 14. $\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2-7\cdot\frac{x+3}{x}+6\left(\frac{x-3}{x}\right)^2=0$.

Решение. ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq 3$.

Обратим внимание на то, что дробь, стоящая во втором слагаемом, равна произведению дробей, возводимых в квадрат в первом и третьем слагаемых, и введем две новые неизвестные: $u=\frac{x+3}{x-3}$ и $v=\frac{x-3}{x}$. Они должны удовлетворять уравнению

$u^2 - 7uv + 6v^2 = 0$.

Это однородное уравнение второй степени. Поскольку $v \neq 0$ (так как $x \neq 3$), можно разделить обе части равенства на v^2: $\left(\frac{u}{v}\right)^2-7\frac{u}{v}+6=0$.

Пусть $t=\frac{u}{v}$, тогда $t^2 - 7t + 6 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 6$.

$$\frac{u}{v}=1,\ \frac{x+3}{x-3}:\frac{x-3}{x}=1,\ x^2+3x=x^2-6x+9,\ 9x=9,\ x=1.$$

$$\frac{u}{v}=6,\ \frac{x+3}{x-3}:\frac{x-3}{x}=1,\ x^2+3x=6x^2-36x+54,\ 5x^2-39x+54=0,\ x_1=6,\ x_2=1{,}8.$$

Ответ: x = 1, x = 1,8, x = 6.

Замечание. Замена переменной – очень удобный способ решения уравнений (и не только рациональных). Конечно, подходящую замену нужно «увидеть», а для этого необходимо накапливать опыт – только он поможет вам быстро найти наиболее удачный вид нового неизвестного.

Отдельный вид уравнений, которые можно с помощью замены свести к квадратному, - так называемые ***возвратные уравнения***, а именно уравнения вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f = 0,$$

где числа a, b, d и f не равны нулю и выполняется равенство: $\frac{a}{f} = \left(\frac{b}{d}\right)^2$.

Пример 15. $6x^4 - 13x^3 - 57x^2 - 39x + 54 = 0$.

Решение. Убедимся, что перед нами возвратное уравнение: $\frac{-13}{-39} = \frac{1}{3}, \frac{6}{54} = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$.

Так как $x = 0$ не является решением уравнения, разделим обе его части на x^2:

$6x^2 - 13x - 57 - \frac{39}{x} + \frac{54}{x^2} = 0$ и перегруппируем слагаемые так:

$6\left(x^2 + \frac{9}{x^2}\right) - 13\left(x + \frac{3}{x}\right) - 57 = 0$.

Пусть $t = x + \frac{3}{x}$. Тогда $t^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} = x^2 + \frac{9}{x^2} + 6$,

следовательно, $x^2 + \frac{9}{x^2} = t^2 - 6$, и для t получаем уравнение: $6(t^2 - 6) - 13t - 57 = 0$, или

$6t^2 - 13t - 93 = 0$, откуда $t_1 = -3$, $t_2 = 31/6$.

$x + \frac{3}{x} = -3, x^2 - 3x + 3 = 0, D < 0$ - решений нет.

$x + \frac{3}{x} = \frac{31}{6}, 6x^2 - 31x + 18 = 0, x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{9}{2}$.

Ответ: 2/3; 9/2.