Тема № 13 «Неравенства с одной переменной. Системы неравенств».

Решением неравенства с одной переменной называется множество значений переменных, которые обращает его в верное числовое равенство.

Неравенства, множества решений которых совпадают, называются ***равносильными.***

Областью определения неравенства с одной переменной называется множество значений переменной, при которых обе части неравенства имеют смысл.

Из данного неравенства получается равносильное ему неравенство, если:

1) из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком;

2) обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число;

3) обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив знак неравенства на противоположный;

4) в какой-либо части неравенства или в обеих его частях выполнить тождественное преобразование, не меняющее области определения неравенства.

Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы. Множеством решений системы является пересечение множеств решений неравенств, входящих в эту систему.

Решение неравенств методом интервалов.

Будем понимать метод интервалов, как метод, применяемых для решения неравенств строго определенного вида:

$(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}(x-x_3)^{\alpha_3}\ldots(x-x_n)^{\alpha_n}\ V\ 0$, где $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in R$; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \in N$ и V – любой из знаков неравенства $>, <, \geq, \leq$.

Если данное неравенства не соответствует указанному виду, то его необходимо привести к этому виду с помощью равносильных преобразований, и лишь затем применять метод интервалов.

Введем ещё два термина. Пусть $(x-x_i)^{\alpha_i}$ - множитель, входящий в неравенство. Если показатель степени α_i – нечетное число, то точку $x=x_i$ будем называть простой. Если показатель степени α_i – четное число, то точку $x=x_i$ будем называть двойной.

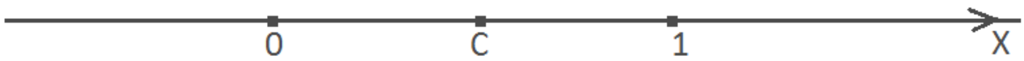
Алгоритм метода интервалов.

1) отметим на числовой прямой точки, соответствующие числам $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, разбив тем самым всю числовую прямую на промежутки (интервалы); причем, если знак неравенства строгий, то точки отмечаются выколотыми, если знак неравенства нестрогий, то точки отмечаются сплошными;
2) на каждом из полученных промежутков выражение $(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}(x-x_3)^{\alpha_3}\ldots(x-x_n)^{\alpha_n}$ будет сохранять свой знак постоянным; расставим эти знаки пользуясь правилом чередования знаков:

a. при переходе через простую точку знак меняется, на противоположный,
b. при переходе через двойную точку знак сохраняется;

3) крайний правый интервал всегда положительный, если все скобки записаны в виде: $(x - x_i)$, отсутствуют скобки вида: $(x_i – x)$ – это важно.
4) после того как знаки всех промежутков определены с полученного рисунка, считывается решение неравенства; ответ записывается в виде объединения промежутков.

Пример 1. На координатной прямой отмечено число с. Расположите в порядке возрастания числа с; 1/с; $с^2$.



1) 1/с; с; $с^2$; 2) $с^2$; с; 1/с 3) 1/с; $с^2$; с 4) с; 1/с; $с^2$.

Решение. Согласно рисунку, $0 < c < 1$, отсюда $c^2 < c$ и $1/c > 1$. Значит, $c^2 < c < 1/c$.
Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ 2.

Пример 2. Какое из приведенных ниже неравенств не следует из неравенства $x – y < z$?

1) $x – z – y < 0$ 2) $y > x – z$ 3) $y < z – x$ 4) $z + y > x$

Решение. Преобразуем каждое из перечисленных неравенств, перенося неизвестные х и у в левую часть неравенства, а z – в правую.

1): $x – z – y < 0 \Leftrightarrow x – y < z$.
2): $y > x – z \Leftrightarrow x – y < z$.
3): $y < z – x \Leftrightarrow x + y < z$. Не следует из исходного неравенства.
4): $z + y > x \Leftrightarrow x – y < z$.

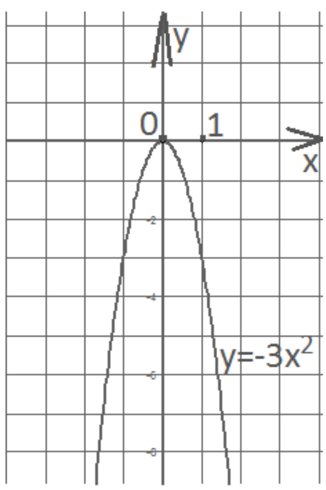
Ответ 3.

Пример 3. Для каждого неравенства указать множество его решений.

А) $– 3x^2 > 0$ Б) $– 3x^2 \le 0$ В) $– 3x^2 < 0$ Г) $– 3x^2 \ge 0$

1) нет решений 2) $(- \infty; + \infty)$ 3) 0 4) $(- \infty; 0) \cup (0; + \infty)$

Решение.

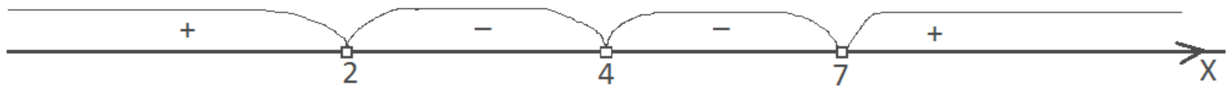


Изобразим график функции $y = -3x^2$.
А) Точка $x = 0$ – выколотая, т.к. неравенство строгое. График лежит ниже оси абсцисс, поэтому решений нет (ответ 1).
Б) Весь график, включая $x = 0$, лежит ниже оси абсцисс, поэтому неравенство выполняется при любых значениях переменной х (ответ 2).
В)) Точка $x = 0$ – выколотая. График, кроме точки $x = 0$, лежит ниже оси абсцисс, поэтому неравенство выполняется значениях переменной х, удовлетворяющих ответу 4).
Г) Неравенство выполняется в единственной точке $x = 0$, при которой $– 3x^2 = 0$ (ответ 3).

Ответ	А	Б	В	Г
	1	2	4	3

Пример 4. Решить неравенство: $(x - 6)^2 > (x - 4)^2$.
Решение. Перенесем все слагаемые в левую часть и разложим ее на множители, используя формулу разности квадратов:
$(x - 6 + x - 4)(x - 6 - x + 4) > 0$, $(2x - 10)(-2) > 0 \mid : (-4)$, $x - 5 < 0$, $x < 5$.
Следовательно, решением неравенства является интервал $(-\infty; 5)$.
Ответ: $(-\infty; 5)$.

Пример 5. Решить неравенство: $(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 11x + 28) < 0$.
Решение. После разложения на множители получаем:
$(x - 2)(x - 4)^2(x - 7) < 0$. $x = 4$ – кратный корень, потому что $(x - 4)^2 > 0$ и при $x < 4$, и при $x > 4$. Поэтому на интервалах, разделенных точкой 4, левая часть неравенства будет иметь одинаковые знаки, а точки 2 и 7 разделяют интервалы с разными знаками левой части. При $x = 0$ левая часть неравенства положительна, следовательно, знаки распределяются так:

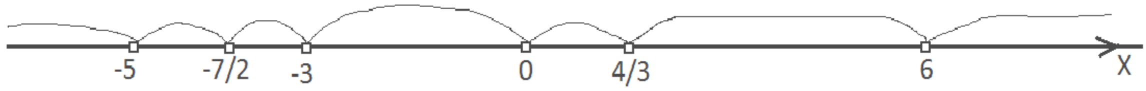


Ответ: $(2; 4) \cup (4; 7)$.

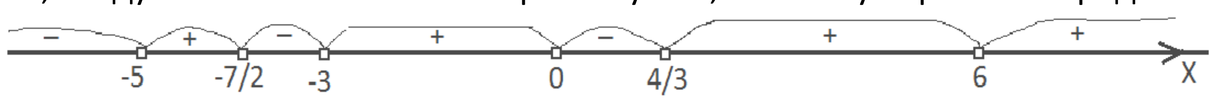
Пример 6. Решить неравенство: $-2(x+5)^3(4-3x)(6-x)^2(2x+7)x^5(3+x) > 0$.
Решение. Приведем данное неравенство к виду стандартному для решения методом интервалов:

$$-2(-1)(x+5)^3(3x-4)(x-6)^2(2x+7)x^5(x+3) > 0,$$
$$(x+5)^3(3x-4)(x-6)^2(2x+7)x^5(x+3) > 0,$$
$$3 \cdot 2(x+5)^3\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-6)^2\left(x+\frac{7}{2}\right)x^5(x+3) > 0,$$
$$(x+5)^3\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-6)^2\left(x+\frac{7}{2}\right)x^5(x+3) > 0.$$

Построим разбиение числовой прямой на промежутки:



Замечание. Масштаб в данном случае соблюдать необязательно, но отдельные принципиальные детали, относящиеся к уровню общей графической культуры, соблюдать, конечно, следует. Расставим знаки в промежутках, используя правило чередования:



Из рисунка видно решение неравенства: $\left(-5,-\frac{7}{2}\right) \cup (-3,0) \cup \left(\frac{4}{3},6\right) \cup (6,+\infty)$.

Ответ: $\left(-5,-\frac{7}{2}\right) \cup (-3,0) \cup \left(\frac{4}{3},6\right) \cup (6,+\infty)$.

Пример 7. Найти наибольшее целочисленное решение неравенства $(x+3)^2(6-x) \geq 0$.

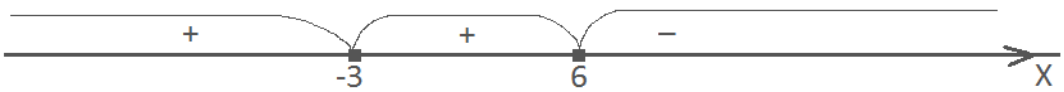
1) 6 2) 5 3) -4 4) 0

Решение. Нестрогие неравенства подобного рода лучше представить в виде совокупности уравнения и строгого неравенства:

1) $(x+3)^2(6-x)=0, \quad x=-3, \quad x=6.$

2) $(x+3)^2(6-x)>0.$

Решим это неравенство методом интервалов, учитывая то, что *x* = -3 – корень четной кратности:



Итак, решение неравенства: $x\in(-\infty;-3)\cup(-3;6).$

Объединяя оба случая, получаем окончательное решение: $x\in(-\infty;6].$ Следовательно, наибольшее целочисленное решение – число 6 (ответ №1).

Ответ: 1.

Пример 8. Решить неравенство: $x(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1) \le 0.$

Решение. Раскроем скобки; имеем:

$$x(x-1)(x-1)(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x-1)(x+1)(x^2+1) \le 0,$$

$$x(x-1)^4(x+1)^2(x^2+x+1)(x^2+1) \le 0$$

Так как $x^2+x+1>0$ при всех x и $x^2+1> 0$ при всех x, то получаем неравенство вида, стандартного для решения методом интервалов и равносильное исходному неравенству: $x(x-1)^4(x+1)^2 \le 0$.

Построим разбиение числовой прямой на промежутки и расставим знаки по правилу чередования:

Таким образом, решение неравенства: $(-\infty,0]\cup\{1\}.$

Ответ: $(-\infty,0]\cup\{1\}.$

Решение дробно-рациональных неравенств

Этапы решения дробно-рациональных неравенств:

1. перенести все слагаемые в левую часть неравенства;
2. привести левую часть к наименьшему общему знаменателю;
3. найти корни числителя и знаменателя полученной дроби; проверить, есть ли среди них кратные;
4. решить неравенство методом интервалов с учетом кратных корней.

Метод интервалов можно применять и для решения дробных рациональных неравенств, если воспользоваться равносильными преобразованиями вида:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) > 0 \qquad \frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) < 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) \ge 0, \\ g(x) \ne 0 \end{cases} \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) \le 0, \\ g(x) \ne 0 \end{cases}$$

Пример 9. Решить неравенство: $\frac{(x^2-9)(x^2-4x-21)}{(x^2-10x+21)(16-x^2)} \geq 0$

Решение. Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases}(x^2-9)(x^2-4x-21)(x^2-10x+21)(16-x^2) \geq 0, \\ (x^2-10x+21)(16-x^2) \neq 0.\end{cases}$$

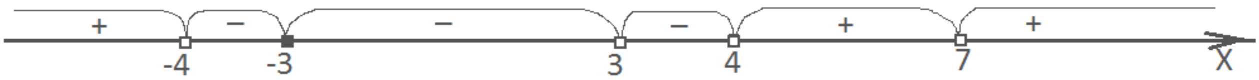
Приведем первое неравенство системы к виду, стандартному для решения методом интервалов:

$(x-3)(x+3)(x+3)(x-7)(x-3)(x-7)(4-x)(4+x) \geq 0,$

$(x-3)(x+3)(x+3)(x-7)(x-3)(x-7)(x-4)(4+x) \leq 0,$

$(x-3)^2(x+3)^2(x-7)^2(x-4)(x+4) \leq 0.$

Построим разбиение числовой прямой на промежутки, учитывая второе неравенство системы, то есть, что $x \neq 3$, $x \neq 7$, $x \neq \pm 4$, и расставим знаки по правилу чередования:



Решение неравенства: $(-4{,}3) \cup (3{,}4)$.

Ответ: $(-4{,}3) \cup (3{,}4)$.

Пример 10. Решить неравенство: $\frac{4x^2-11x-21}{x^2-4x-5} \leq 3$.

Решение. Выполним последовательно пункты приведенной «инструкции»:

1) $\frac{4x^2-11x-21}{x^2-4x-5} - 3 \leq 0.$

2) $\frac{x^2+x-6}{x^2-4x-5} \leq 0.$

3) $x^2 + x - 6 = 0$, $x_1 = -3$, $x_2 = 2$; $x^2 - 4x - 5 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 5$. Теперь можно разложить числитель и знаменатель на множители: $\frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-5)} \leq 0.$ Видим, что в каждой найденной точке меняет знак ровно один из множителей, то есть меняет знак и вся дробь.

4) Расставим знаки на интервалах:

В ответе укажем промежутки, на которых дробь отрицательна. Не забудем учесть, что корни знаменателя в ответ никогда не входят (знаменатель не может равняться нулю), а корни числителя войдут в ответ, если неравенство нестрогое.

Ответ: $[-3; -1) \cup [2; 5)$.

Пример 11. Решить неравенство: $\frac{2x^2+17x+36}{x^2+6x+5} \geq \frac{x+4}{x+1}$.

Решение. Выполним тождественные преобразования:

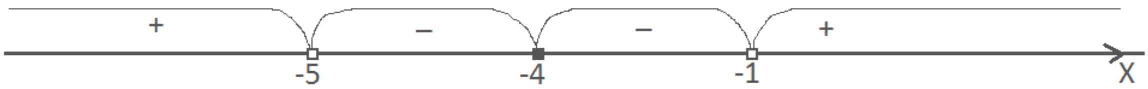
$$\frac{2x^2+17x+36}{(x+1)(x+5)} - \frac{x+4}{x+1} \geq 0,$$

$$\frac{2x^2+17x+36-(x+4)(x+5)}{(x+1)(x+5)} \geq 0,$$

$$\frac{x^2+8x+16}{(x+1)(x+5)} \geq 0,$$

$$\frac{(x+4)^2}{(x+1)(x+5)} \geq 0.$$

Корень числителя (x = - 4) – кратный, так как при этом значении *x* ни один множитель не меняет знак. Корни знаменателя: x = - 5 и x = -1. При x = 0 дробь положительна. Знаки на интервалах:



Заметим, что неравенство нестрогое, поэтому точка – 4 входит в ответ.

Ответ: (- ∞; - 5)U(- 1; ∞), x = - 4.

Пример 12. Определить количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{3x+2}{x^2+x-2} < -1.$$

1) 0 2) 1 3) 2 4) 3

Решение. Перенесем -1 в левую часть неравенства и приведем левую часть к общему знаменателю:

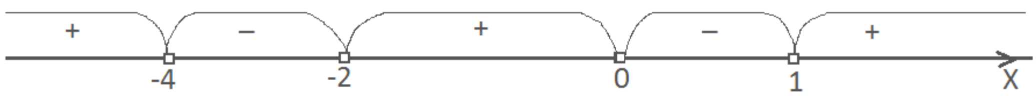
$$\frac{3x+2}{x^2+x-2}+1<0, \quad \frac{x^2+4x}{x^2+x-2}<0.$$

Найдем корни числителя и знаменателя и применим метод интервалов:

$x^2+4x=0 \Rightarrow x=0, \quad x=-4$ – корни числителя;

$x^2+x-2=0 \Rightarrow x=1, \quad x=-2$ – корни знаменателя.

Определим знак дроби, стоящей в левой части неравенства, на интервалах, разделенных полученными точками:



Итак, решение неравенства – объединение интервалов $(-4;-2) \cup (0;1)$. Оно содержит только одно целое число: -3. Поэтому правильным ответом является ответ 2.

Ответ: 2.

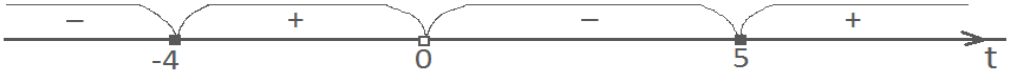
Замечание. Если для решения неравенства используется замена переменной, то важно не сделать раньше времени обратную замену. Сначала нужно полностью решить неравенство для вспомогательного неизвестного, найти его возможные значения (записав их не в интервальной форме, а в виде одного или нескольких неравенств), и только после этого подставить в эти неравенства выражение для вспомогательного неизвестного.

Пример 13. Решить неравенство: $x^2 - 7x + 16 - \frac{20}{x^2-7x+17} \leq 0.$

Решение. Сделаем замену: $t = x^2 - 7x + 17$ и решим неравенство

$$t-1-\frac{20}{t} \leq 0, \quad \frac{t^2-t-20}{t} \leq 0,$$

$$\frac{(t-5)(t+4)}{t} \leq 0.$$



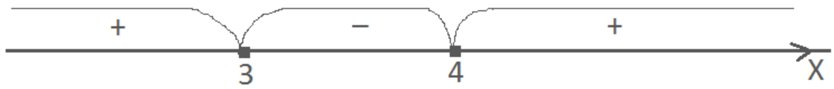
Его решение можно записать так: $t \leq -4, 0 < t \leq 5.$ После обратной замены получим:

$x^2 - 7x + 17 \le -4,\ x^2 - 7x + 21 \le 0$. Дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в левой части, отрицателен, следовательно, левая часть неравенства не может изменить знак, то есть сохраняет постоянный знак при любом значении *x*. Неравенство решений не имеет, т.к. y= $x^2 - 7x + 21$ – парабола, с ветвями, направленными вверх, лежащая выше оси OX.

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 17 > 0 \\ x^2 - 7x + 17 \le 5 \end{cases},\ \begin{cases} x^2 - 7x + 17 > 0 \\ x^2 - 7x + 12 \le 0 \end{cases}.$$

Первое неравенство верно всегда, т.к. D < 0 и y= $x^2 - 7x + 17$ – парабола, с ветвями, направленными вверх, лежащая выше оси OX.

$x^2 - 7x + 12 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 3)(x - 4) \le 0$



$3 \le x \le 4.$ Это и есть окончательный ответ.

Ответ: [3; 4].

Пример 14. Для каждой системы неравенств указать множество ее решений.

$$А)\begin{cases} 5(x+1) \le 7(x+3) + 1, \\ \dfrac{2x-1}{3} \le \dfrac{x+1}{2} \end{cases} \qquad Б)\begin{cases} 7 - 3x \ge 0, \\ 4x - 20 < 0 \end{cases} \qquad В)\begin{cases} \dfrac{x-5}{3} < \dfrac{3x-1}{2}, \\ \dfrac{x+3}{5} > \dfrac{x+2}{3} \end{cases}$$

1) (- ∞; $^7/_3$] 2) [-8,5; 5] 3) (-1; - ½) 4) (- ∞; - 1)U(- ½ ; ∞)

Решение. Заметим, что имеем дело с системами линейных неравенств. Решим каждую систему неравенств отдельно.

$$А)\begin{cases} 5(x+1) \le 7(x+3) + 1, \\ \dfrac{2x-1}{3} \le \dfrac{x+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 21 - 1 \le 7x - 5x, \\ 4x - 2 \le 3x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -8{,}5, \\ x \le 5 \end{cases}$$

Этой системе соответствует решение 2).

$$Б)\begin{cases} 7 - 3x \ge 0, \\ 4x - 20 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 \ge 3x, \\ 4x < 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7/3, \\ x < 5 \end{cases}$$

Этой системе соответствует решение 1).

$$В)\begin{cases} \dfrac{x-5}{3} < \dfrac{3x-1}{2}, \\ \dfrac{x+3}{5} > \dfrac{x+2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 10 < 9x - 3, \\ 3x + 9 > 5x + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 10 < 9x - 2x, \\ 9 - 10 > 5x - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x < -1/2 \end{cases}$$

Этой системе соответствует решение 3).

Ответ	А	Б	В
	2	1	3