

Тема № 12 «Системы двух уравнений с двумя неизвестными».

Системой уравнений называется некоторое количество уравнений, которые должны выполняться одновременно. **Решением системы** уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы в верное равенство. **Решить систему** уравнений — значит найти все её решения или установить, что их нет.

Некоторые способы решений системы уравнений.

Способ подстановки. Из какого-либо уравнения следует выразить, одну переменную через другую. Подставить полученное выражение для переменной в другое уравнение и решить его. Сделать подстановку найденного значения переменной и вычислить значение второй переменной.

Способ сложения. Следует уравнивать модули коэффициентов при какой-нибудь переменной. Складывая или вычитая полученные уравнения, найти одно неизвестное. Подставить найденное значение в одно из исходных уравнений исходной системы, найти второе неизвестное.

Графический способ. Решая систему уравнений графическим способом, следует выразить одну переменную через другую (например, y через x) в каждом уравнении. Построить в одной системе координат график каждого уравнения. Определить координаты точки пересечения. Сделать проверку.

Пример 1. Выразите из уравнения $2x - y/2 = 7$ переменную x через y .

$$1) x = y/4 + 3,5 \quad 2) x = y + 3,5 \quad 3) y = 4x - 14 \quad 4) x = y/2 + 7$$

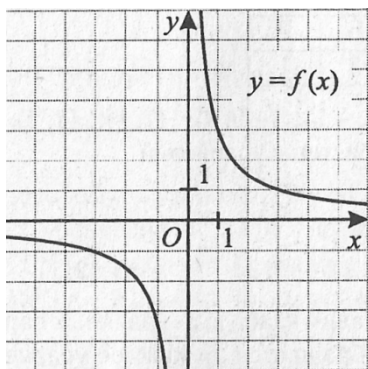
Решение. $2x = y/2 + 7$; $x = y/4 + 3,5$.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ 1.

Пример 2. Гипербола, изображённая на рисунке, задаётся уравнением $y = 3/x$.

Используя рисунок, установите соответствие между системами уравнений и утверждениями.



Системы уравнений	Утверждения
А) $\begin{cases} y = \frac{3}{x}, \\ y = x - 2 \end{cases}$	1) система имеет одно решение
Б) $\begin{cases} y = \frac{3}{x}, \\ y = 2 - x \end{cases}$	2) система имеет два решения
В) $\begin{cases} y = \frac{3}{x}, \\ y = 2 \end{cases}$	3) система не имеет решений

Решение. Рассмотрим каждую из представленных систем уравнений. В каждой из систем уравнений первое уравнение соответствует гиперболе, изображённой на рисунке, а второе — прямой.

А) угловой коэффициент прямой положителен (угол между положительным направлением оси абсцисс и данной прямой линией острый). Следовательно, прямая пересекает гиперболу в двух точках, и система имеет два решения, что соответствует утверждению 2).

Б) угловой коэффициент прямой отрицателен (угол между положительным направлением оси абсцисс и данной прямой линией тупой). Заметим, что прямая проходит через точку с координатами (1; 1), и, следовательно, прямая не пересекает гиперболу. В этом случае система не имеет решений, что соответствует утверждению 3).

В) прямая проходит через точку с координатами (0;2) параллельно оси абсцисс. следовательно, прямая пересекает гиперболу в одной точке, и система имеет одно решение, что соответствует утверждению 1).

Ответ А Б В

2 3 1

Пример 3. Из пар чисел (3; - 1), (- 9; 3), (2; 1), (1; 2) выберите ту, которая является решением системы уравнений
$$\begin{cases} 2x + 11y = 15, \\ 10x - 11y = 9 \end{cases}$$

1) (3; - 1)

2) (- 9; 3)

3) (2; 1)

4) (1; 2)

Решение. Подставим каждую из заданных пар чисел в систему уравнений и проверим, обращается ли каждое уравнение системы в верное равенство.

$$1) (3; - 1): \begin{cases} 2 \cdot 3 + 11 \cdot (-1) \neq 15, \\ 10 \cdot 3 - 11 \cdot (-1) \neq 9 \end{cases}$$

$$2) (- 9; 3): \begin{cases} 2 \cdot (-9) + 11 \cdot 3 = 15, \\ 10 \cdot (-9) - 11 \cdot 3 \neq 9 \end{cases}$$

$$3) (2; 1): \begin{cases} 2 \cdot 2 + 11 \cdot 1 = 15, \\ 10 \cdot 2 - 11 \cdot 1 = 9 \end{cases}$$

$$4) (1; 2): \begin{cases} 2 \cdot 1 + 11 \cdot 2 = 15, \\ 10 \cdot 1 - 11 \cdot 2 = 9 \end{cases}$$

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ 3.

Пример 4. Найти решение системы уравнений
$$\begin{cases} x - 3y = -20, \\ 5y - 2x = 25 \end{cases}$$

1) (- 15; 20)

2) (- 10; - 25)

3) (5; 25)

4) (25; 15)

Решение. Решим систему способом сложения. Для этого сначала перепишем систему,

чтобы переменные стояли друг под другом:
$$\begin{cases} x - 3y = -20, \\ -2x + 5y = 25 \end{cases}$$

Умножив первое уравнение системы на 2 и, сложив его со вторым, получим:

$$\begin{cases} 2x - 6y = -40, \\ -2x + 5y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = -20, \\ -y = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 - 20 = 25, \\ y = 15 \end{cases}$$

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ 4.

Пример 5. Найти $x_0 + 2y_0$, если $(x_0; y_0)$ – решение системы уравнений
$$\begin{cases} \frac{y}{4} - \frac{x}{5} = 6, \\ \frac{x}{15} + \frac{y}{12} = 0 \end{cases}$$

Решение. Решим систему способом сложения. Для этого сначала перепишем систему,

чтобы переменные стояли друг под другом:
$$\begin{cases} -\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 6, \\ \frac{x}{15} + \frac{y}{12} = 0 \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на $1/3$, и складывая почленно уравнения системы, полу-

чим:
$$\begin{cases} -\frac{x}{15} + \frac{y}{12} = 2, \\ \frac{x}{15} + \frac{y}{12} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2y}{12} = 2, \\ \frac{x}{15} + \frac{y}{12} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12, \\ \frac{x}{15} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12, \\ x = -15 \end{cases}$$

Следовательно, $x_0 + 2y_0 = -15 + 2 \cdot 12 = 9$.

Ответ 9.

Пример 6. Найти точку пересечения прямых $2x + 3y = 8$ и $3x - 2y = -1$.

1) $(-2; 4)$ 2) $(-1; 3)$ 3) $(-1; -2)$ 4) $(1; 2)$

Решение. Координатами искомой точки будет решение системы уравнений, задающих пересекающиеся прямые:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 16 \\ 9x - 6y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 13x = 13 \end{cases} \Rightarrow x = 1, \quad y = 2.$$

Следовательно, правильный ответ приведен под номером 4.

Ответ: 4.

Пример 7. Найти целочисленное решение системы уравнений
$$\begin{cases} x^2 - 2xy = 8, \\ x + 2y = 6. \end{cases}$$

1) $(10; -2)$ 2) $(8; -1)$ 3) $(4; 1)$ 4) $(2; 2)$ 5) $12; -3)$

Решение. Выразим из второго уравнения системы x через y и сделаем подстановку:

$$\begin{cases} x = 6 - 2y \\ (6 - 2y)^2 - 2y(6 - 2y) = 8 \end{cases} \Rightarrow 8y^2 - 36y + 28 = 0,$$

$$2y^2 - 9y + 7 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{7}{2} \quad - \text{ не целое.}$$

$$x = 6 - 2 = 4.$$

Итак, правильный ответ дан под номером 3.

Ответ 3.

Пример 8. Найти наименьшее значение выражения $(9x + 2y - 13)^2 + (3x - 4y + 5)^2$ и значения x и y , при которых оно достигается.

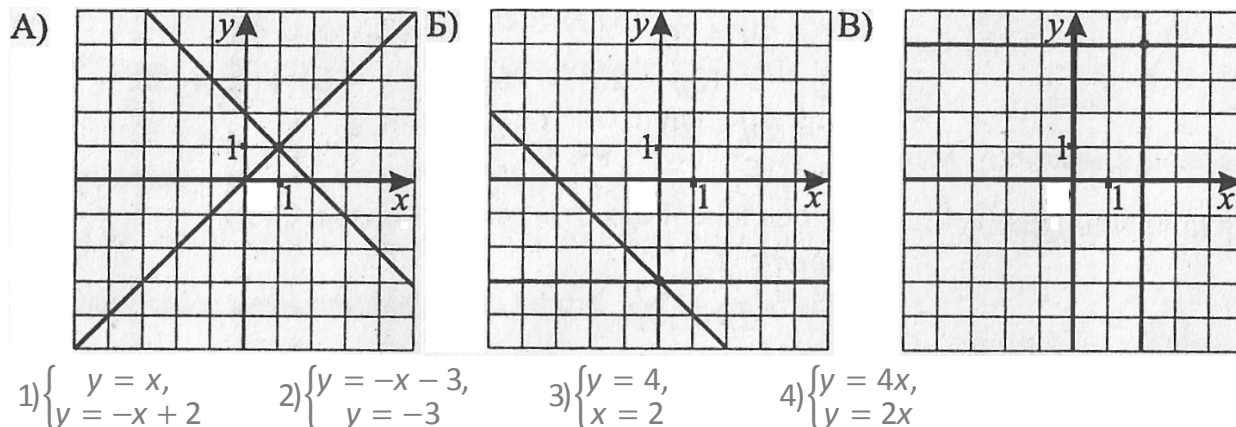
Решение. Значение заданного выражения не может быть отрицательным, так как выражение представляет собой сумму квадратов трехчленов. Следовательно, наименьшее значение, которое может достигать исходное выражение, равно 0. Это возможно для x и y , удовлетворяющих системе уравнений

Решим систему способом сложения. Умножая первое уравнение на 2 и, складывая его со вторым почленно, получим

$$\begin{cases} 18x + 4y - 26 = 0, \\ 3x - 4y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21x - 21 = 0, \\ 3x - 4y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ 3 \cdot 1 + 5 = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2 \end{cases}$$

Ответ 0; $x = 1$; $y = 2$.

Пример 9. Для каждой пары прямых на рисунке укажите соответствующую систему уравнений



Решение. Одна из прямых, изображённая на рисунке А) проходит через точки с координатами $(0; 0)$, $(1; 1)$ и, следовательно, задаётся уравнением $y = x$. Другая — через точки с координатами $(0; 2)$, $(2; 0)$, задаётся уравнением $y = -x + 2$. Этим прямым соответствует система уравнений 1).

На рисунке Б) одна из прямых проходит через точки с координатами $(0; -3)$, $(-3; 0)$ и, следовательно, задаётся уравнением $y = -x - 3$. Другая — параллельна оси абсцисс и проходит через точку с координатами $(0; -3)$, поэтому задаётся уравнением $y = -3$. Этим прямым соответствует система уравнений 2).

На рисунке В) одна из прямых параллельна оси ординат и проходит через точку с координатами $(2; 0)$, следовательно, задаётся уравнением $x = 2$. Другая — параллельна оси абсцисс и проходит через точку с координатами $(0; 4)$, следовательно, задаётся уравнением $y = 4$. Этим прямым соответствует система уравнений 3).

Ответ А Б В

1 2 3

Пример 10. Найти все решения системы $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 102; \\ xy + x + y = 69. \end{cases}$

Решение. Умножим обе части второго уравнения на 2 и сложим левые и правые части уравнений: $(x^2 + 2xy + y^2) + (x + y) = 240$. Сделаем замену: $t = x + y$ и решим уравнение для t :

$$t^2 + t - 240 = 0; \quad t_1 = -16, \quad t_2 = 15.$$

а) $x + y = -16$, тогда из второго уравнения $xy = 69 - (x + y) = 69 + 16 = 85$. Решим систему: $\begin{cases} x + y = -16 \\ xy = 85 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = -x - 16 \\ x^2 + 16x + 85 = 0 \end{cases}$. Дискриминант второго уравнения отрицателен, поэтому система не имеет решений.

$$\text{б) } x + y = 15, \quad xy = 69 - 15 = 54. \text{ Тогда } \begin{cases} y = 15 - x \\ x^2 - 15x + 54 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 = 6 \\ y_1 = 9 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2 = 9 \\ y_2 = 6 \end{cases}.$$

Ответ: (6; 9), (9; 6).

Пример 11. Используя графическую интерпретацию, выберите из данных уравнений второе уравнение системы $\begin{cases} y = -x \\ \dots \end{cases}$ так, чтобы она не имела решение.

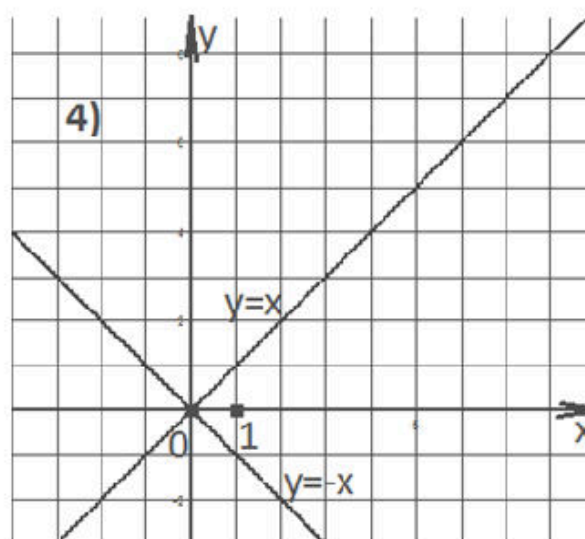
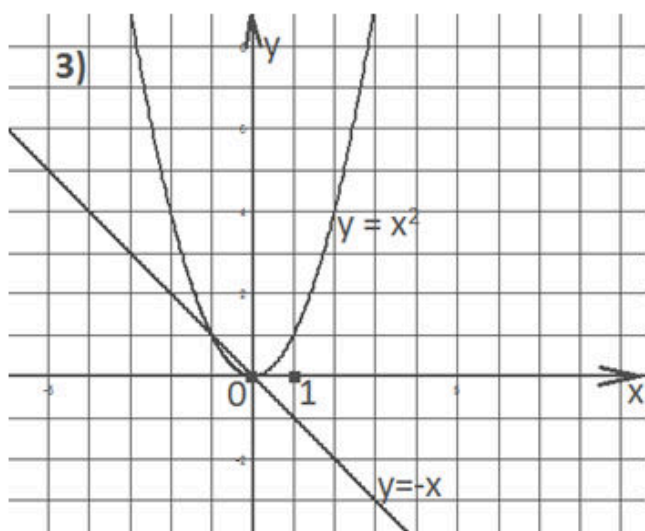
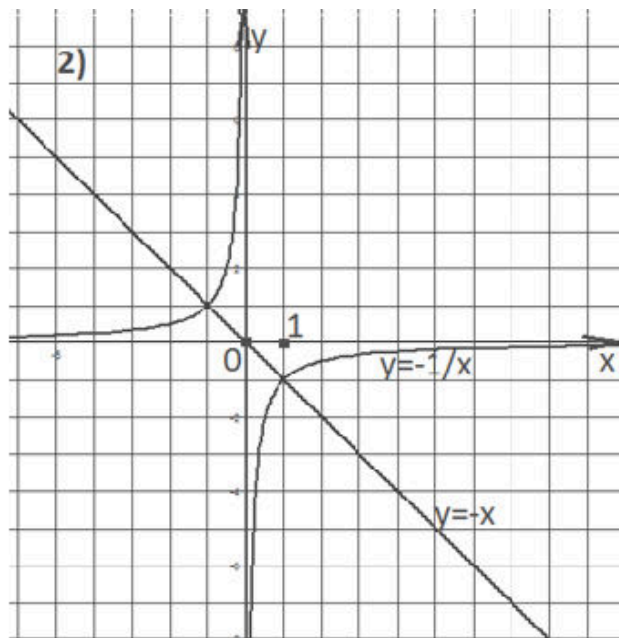
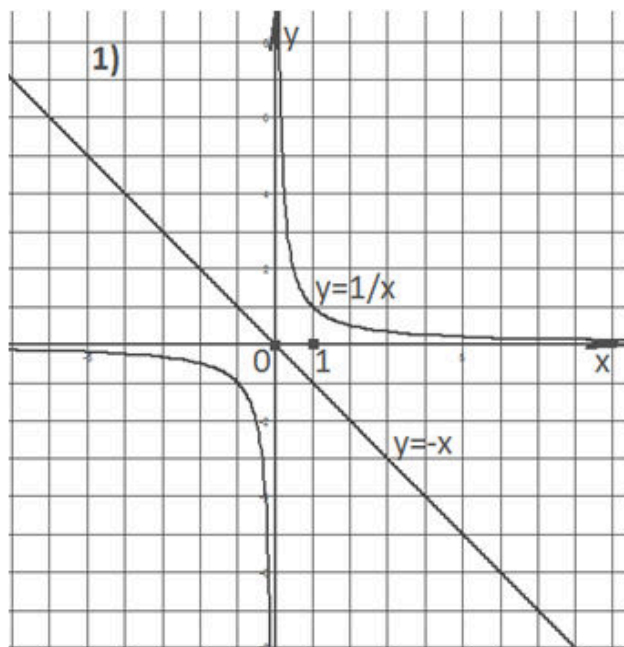
1) $y = 1/x$

2) $y = -1/x$

3) $y = x^2$

4) $y = x$

Решение. Построим схематично графики, указанных функций:



Нет пересечений только на первом графике. Следовательно, правильный ответ 1).

Ответ 1.

Пример 12. Решить систему уравнений $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 10, \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 9 \end{cases}$

1) $(-1/4; 1/3)$

2) $(4; 3)$

3) $(1/4; 1/3)$

4) другой ответ

Решение. Замена: $a = 1/x$; $b = 1/y$. Решим систему способом сложения.

$$\begin{cases} a + 2b = 10, \\ 3a - b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 10, \\ 6a - 2b = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 10, \\ 7a = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4, \\ b = 3 \end{cases}$$

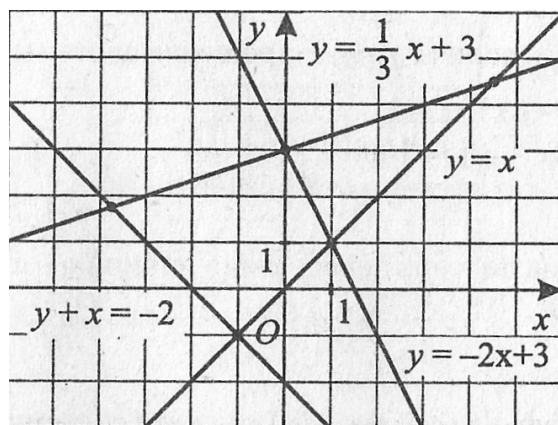
Обратная замена: $1/x = 4 \Rightarrow x = 1/4$; $1/y = 3 \Rightarrow y = 1/3$.

Итак, правильный ответ дан под номером 3.

Ответ 3.

Пример 13. Пользуясь графиком, изображенным на рисунке, найдите решение систе-

мы
$$\begin{cases} y + x + 2 = 0, \\ x - y = 0 \end{cases}$$



1) (1; 1)

2) (-1; -1)

3) (0; 3)

4) (-4; 2)

Решение. Запишем систему, выразив переменную y :
$$\begin{cases} y = -x - 2, \\ y = x \end{cases}$$

Первое уравнение системы соответствует графику с формулой $y + x = -2$, изображенного на рисунке, который пересекается с графиком $y = x$ в точке с координатами $(-1; -1)$.

Следовательно, правильный ответ приведен под номером 2.

Ответ: 2.

Пример 14. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 5x + 3y + \frac{4}{7x - y} = 5, \\ 5x + 3y - \frac{4}{7x - y} = 3 \end{cases}$$

1) (13/8; 13/4)

2) (2/13; 1/13)

3) (8/13; 4/13)

4) другой ответ

Решение. Сначала сложим первое уравнение со вторым, а затем вычтем из первого

уравнения второе, получим систему:
$$\begin{cases} 10x + 6y = 8, \\ \frac{8}{7x - y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 3y = 4, \\ 7x - y = 4 \end{cases}$$

$5x + 3y = 7x - y$; $2x = 4y$; $x = 2y$.

$$\begin{cases} 10y + 3y + \frac{4}{14y - y} = 5, \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13y + \frac{4}{13y} = 5, \\ x = 2y \end{cases}$$
 Замена $13y = p$, тогда первое уравнение при

$p \neq 0$ имеет вид: $p + \frac{4}{p} = 5$; $p^2 - 5p + 4 = 0$; $p_1 = 1$; $p_2 = 4$. Отсюда $y_1 = 1/13$; $y_2 = 4/13$,

тогда $x_1 = 2/13$; $x_2 = 8/13$.

Итак, решение системы: $(2/13; 1/13)$, $(8/13; 4/13)$.

Следовательно, правильный ответ приведен под номером 4.

Ответ: 4.