Тема № 11 «Линейные, квадратные и рациональные уравнения».

Линейное уравнение $ax + b = 0$

Решение $ax + b = 0$, где a, b – некоторые числа, x – переменная:

1) при $a \neq 0$, $x = -b/a$;
2) при $a = 0$ и $b = 0$, x – любое число;
3) при $a \neq 0$ и $b \neq 0$ – решений нет.

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

Формулы корней квадратного уравнения

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, дискриминант $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$		
$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a}$	$x_{1,2} = \frac{-b}{2 \cdot a}$	Среди действительных чисел корней нет

Формулы корней приведенного квадратного уравнения

$x^2 + p \cdot x + q = 0$, дискриминант $D_0 = \frac{p^2}{4} - q$		
$D_0 > 0$	$D_0 = 0$	$D_0 < 0$
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D_0}$	$x_{1,2} = -\frac{p}{2}$	Среди действительных чисел корней нет

Теорема Виета. В приведенном квадратном уравнении $x^2 + p \cdot x + q = 0$ сумма корней равна коэффициенту при x, взятому с противоположным знаком, а их произведение – свободному члену:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Если задано квадратное уравнение в общем виде: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, то делением уравнения на $a \neq 0$ можно свести к приведенному, где $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$.

Следствия теоремы Виета

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

1) $a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$

2) $a + c = b \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$

Разложение квадратного трехчлена на множители

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, где x_1 и x_2 корни уравнения $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$.

Рациональные уравнения $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$

Решение рационального уравнения P(x)/Q(x) = 0, где P(x) и Q(x) многочлены сводится к решению системы: $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$

Способы решения рациональных уравнений:

1) Разложение на множители числителя и знаменателя;
2) Введение новой переменной, если решаемое уравнение представимо в виде f (g(x)) = 0. Полагая g(x) = t мы переходим к решению системы $\begin{cases} f(t) = 0, \\ g(x) = t. \end{cases}$

Этапы решения рационального уравнения:

1) определить ОДЗ (область допустимых значений):ни один знаменатель не может равняться нулю;
2) найти наименьший общий знаменатель всех дробей;
3) умножить уравнение на этот знаменатель и решить полученное целое уравнение;
4) включить в ответ только те корни, которые входят в ОДЗ.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{5-x}{2} + 1 = \frac{3x-1}{4}$

Решение. Заметим, что данное уравнение является линейным. Умножим обе части уравнения на общий знаменатель 4, получим:

$10 - 2x + 4 = 3x - 1$; $5x = 15$; $x = 3$.

Ответ 3.

Пример 2. Решить уравнение $3x^2 - 12x + 1 = 4x - 2 - 2x^2$.

Решение. Перенесем все слагаемые в левую часть и приведем подобные, получим:

$5x^2 - 16x + 3 = 0$. Используем способ решения квадратного уравнения, описанный в теме «Многочлены»:

По теореме, обратной к теореме Виета: $x_1x_2 = 5 \cdot 3 = 15$

$x_1 + x_2 = 16$

Подборм получим: $ax_1 = 15$; $ax_2 = 1$, тогда $x_1 = 15/5 = 3$; $x_2 = 1/5 = 0{,}2$.

Ответ 0,2; 3.

Пример 3. При каком значении с уравнение $(c + 5)x^2 + (2c + 10)x + 4 = 0$ имеет только один корень?

Решение. Квадратное уравнение имеет единственное решение, если его дискриминант равен нулю:

$$D = b^2 - 4ac = (2c+10)^2 - 4\cdot 4(c+5) = 4c^2 + 40c + 100 - 16c - 80 =$$
$$= 4c^2 + 24c + 20 = 4(c^2 + 6c + 5) = 0$$

По 2-му следствию теоремы Виета корни уравнения $c^2 + 6c + 5 = 0$: $c_1 = -1$; $c_2 = -5$.
Ответ -1; -5.

Пример 4. При каких значениях x сумма дробей $\frac{2x-2}{x+3}$ и $\frac{x+3}{x-3}$ равна 5?

1) -6; 5   2) -5; 6   3) -3; 1   4) -6; -5

Решение. Задача сводится к решению уравнения: $\frac{2x-2}{x+3}+\frac{x+3}{x-3}=5$ при условии $x \neq \pm 3$.

Умножим обе части на общий знаменатель $(x-3)(x+3)$, получим:

$(2x-2)(x-3) + (x+3)^2 = 5(x^2-9) \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 + x^2 + 6x + 9 = 5x^2 - 45 \Leftrightarrow$

$2x^2 + 2x - 60 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 30 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -6$; $x_2 = 5$.

Ответ 1.

Пример 5. При каких значениях c один корень уравнения $2x^2 - 6x + 1 - c = 0$ на 10 больше другого?

Решение. По теореме Виета должны выполняться условия:

$$\begin{cases} x + x - 10 = \frac{6}{2}; \\ x(x-10) = \frac{1-c}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 13; \\ 2x^2 - 20x - 1 + c = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6{,}5; \\ 2\cdot 6{,}5^2 - 20\cdot 6{,}5 - 1 + c = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6{,}5; \\ c = 46{,}5. \end{cases}$$

Ответ 46,5.

Пример 6. Найти сумму корней уравнения $8x^2 + 2x - 3 = 0$.

Решение. По теореме Виета: $x_1 + x_2 = -2/8 = -0{,}25$

Ответ –0,25.

Пример 7. Составьте приведенное квадратное уравнение, корни которого равны соответственно $x_1 = -7$, $x_2 = -1$.

1) $x^2 + 8x + 7 = 0$ 2) $x^2 - 8x + 7 = 0$ 3) $x^2 - 8x - 7 = 0$ 4) $x^2 + 8x - 7 = 0$

Решение. Приведенное квадратное уравнение имеет вид: $x^2 + p\cdot x + q = 0$

По формулам Виета $p = -(x_1 + x_2) = -(-7 + (-1)) = 8$; $q = x_1 \cdot x_2 = (-7)\cdot(-1) = 7$.

Значит, $x^2 + 8x + 7 = 0$ – искомое уравнение, ему соответствует ответ №1.

Ответ 1.

Пример 8. Решить уравнение $\frac{6}{(x+1)(x+2)}+\frac{8}{(x-1)(x+4)}=1$.

Решение. Уравнение имеет решения при: $x \neq -2$, $x \neq -1$, $x \neq 1$, $x \neq -4$.

Раскрыв скобки в знаменателях, получаем уравнение:

$$\frac{6}{x^2+3x+2}+\frac{8}{x^2+3x-4}=1.$$

Замена: $x^2 + 3x + 2 = t$, тогда получим уравнение $\frac{6}{t}+\frac{8}{t-6}=1$

Умножив обе части уравнения на общий знаменатель $t(t – 6)$, получим при $t \neq 0$ и $t \neq 6$:

$6(t – 6) + 8t = t(t – 6)$; $14t – 36 = t^2 – 6t$; $t^2 – 20t + 36 =0$.

По теореме, обратной к теореме Виета $t_1=2$, $t_2=18$.

Обратная замена: $x^2 + 3x + 2 = 2$ или $x^2 + 3x + 2 = 18$.

$x^2 + 3x = 0$ или $x^2 + 3x - 16 =0$.

$x_1= -3$, $x_2=0$ или $x_{3,4}=0,5(-3\pm\sqrt{73})$.

Ответ: -3, 0, 0,5 $(-3+\sqrt{73})$, 0,5$(-3-\sqrt{73})$.

Пример 9. Решить уравнение $\frac{x^2-6x-9}{x}=\frac{x^2-4x-9}{x^2-6x-9}$.

Решение. Уравнение имеет решения при: $x \neq 0$, $x \neq 3 \pm 3\sqrt{2}$.
Прибавим к числителю второй дроби выражение $2x – 2x$, тождественно равное нулю:

$$\frac{x^2-6x-9}{x}=\frac{(x^2-6x-9)+2x}{x^2-6x-9},$$

$$\frac{x^2-6x-9}{x}=1+2\frac{x}{x^2-6x-9}$$

Замена: $\frac{x^2-6x-9}{x}=t$, тогда получим уравнение: $t=1+\frac{2}{t} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-t-2=0, \\ t \neq 0 \end{cases}$

Решив первое уравнение системы, используя 2-е следствие теоремы Виета, получаем корни $t_1=-1$, $t_2=2$.

Обратная замена:

$$1)\ \frac{x^2-6x-9}{x}=-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x-9+x=0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x-9=0, \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Корни квадратного уравнения системы: $x_{1,2}= (5\pm\sqrt{61})/2$.

2) $\dfrac{x^2-6x-9}{x}=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x-9-2x=0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-8x-9=0, \\ x \neq 0 \end{cases}$

Корни квадратного уравнения системы: x_3=-1, x_4=9.

Ответ: 0,5 (5+√61); (5-√61)/2; -1; 9.

Пример 10. Решить уравнение $\dfrac{5}{x^2-14x+24}-\dfrac{4}{x^2-16x+48}=\dfrac{1}{x-4}$.

Решение. Разложим на множители знаменатели дробей левой части уравнения. Для этого, используя теорему Виета, найдем корни квадратных уравнений:

$x^2 - 14x + 24 = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = 12$.

$x^2 - 16x + 48 = 0$; $x_3 = 4$, $x_4 = 12$.

$x - 4 = 0$; $x = 4$.

Следовательно, уравнение имеет решения при: $x \neq 2$, $x \neq 4$, $x \neq 12$.

$x^2 - 14x + 24 = (x - 2)(x - 12)$,

$x^2 - 16x + 48 = (x - 4)(x - 12)$,

Общий знаменатель равен $(x - 2)(x - 4)(x - 12)$. Умножим на него обе части равенства:

$5(x - 4) - 4(x - 2) = x^2 - 14x + 24$;

$x^2 - 15x + 36 = 0$;

$x_1 = 3$, $x_2 = 12$ – посторонний корень (не входит в ОДЗ).

Ответ: x = 3.

Пример 11. Решить уравнение $\dfrac{4x+20}{x^2+5x+14}+\dfrac{x^2+5x+14}{x+5}=5.$

Решение. Уравнение имеет решения при: $x \neq -5$.

Если записать уравнение в виде $4\cdot\dfrac{x+5}{x^2+5x+14}+\dfrac{x^2+5x+14}{x+5}=5$**,** то можно заметить, что его левая часть содержит две взаимно обратные дроби. Введем новое неизвестное: $t=\dfrac{x^2+5x+14}{x+5}$, тогда $\dfrac{x+5}{x^2+5x+14}=\dfrac{1}{t}$, и уравнение для t выглядит так: $\dfrac{4}{t}+t=5,$ или при $t \neq 0$: $t^2 - 5t + 4 = 0$.   Отсюда $t_1 = 1$, $t_2 = 4$.

$\dfrac{x^2+5x+14}{x+5}=1,\ x^2+4x+9=0,\ D<0$ – нет решений.

$\dfrac{x^2+5x+14}{x+5}=4,\ x^2+x-6=0,\ x_1=2,\ x_2=-3.$

Ответ x = 2, x = – 3.

Пример 12. Решить уравнение $\dfrac{5}{x(x+2)}-\dfrac{3}{(x+1)^2}=\dfrac{11}{12}$.

Решение. Уравнение имеет решения при: $x \neq -2$, $x \neq 0$, $x \neq -1$.

Раскроем скобки в знаменателях дробей левой части уравнения:

$\dfrac{5}{x^2+2x}-\dfrac{3}{x^2+2x+1}=\dfrac{11}{12}$.

Замена: $t = x^2 + 2x$ и решим уравнение $\dfrac{5}{t}-\dfrac{3}{t+1}=\dfrac{11}{12}$ при: $t \neq 0, t \neq -1.$

Упрощая, получим: $11t^2 – 13t – 60 = 0$, $t_1 = 3$, $t_2 = – 20/11$ (оба значения входят в ОДЗ).
Обратная замена:

А) $x^2 + 2x = 3$, $x^2 + 2x – 3 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = – 3$.

Б) $x^2 + 2x = -\frac{20}{11}, 11x^2 + 22x + 20 = 0, D < 0$ – решений нет.

Ответ $x = 1$, $x = – 3$.