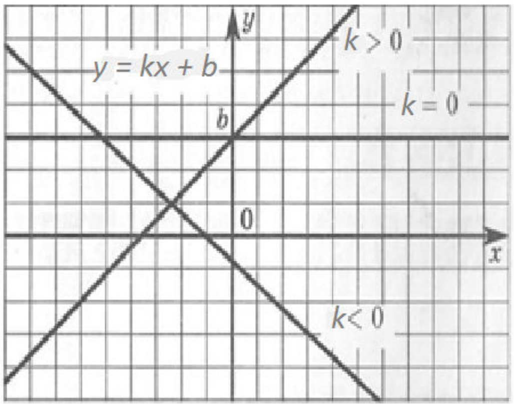
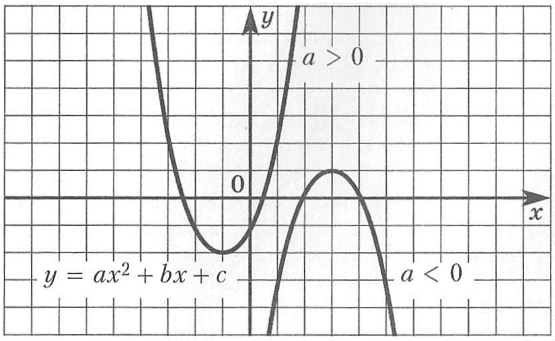
Тема № 10 «Графики элементарных функций».

1. ***Линейная функция f(x) = kx + b.*** График *- прямая линия* .



1) Область определения D(f) = R.
2) Область значений E(f) = R.
3) Нули функции y = 0 при $x = – k/b$.
4) Экстремумов нет.
5) Монотонность: Функция монотонно возрастает при k > 0 и убывает при k < 0.
6) Четность: при b = 0 прямая линия проходит через начало координат, при этом функция $y = kx$ - нечетная.
7) Промежутки знакопостоянства: зависят от знака параметра k:
   $k > 0$, то $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$;
   $k < 0$, то $y > 0$ при $x < 0$; $y < 0$ при $x > 0$.

2. ***Квадратичная функция f(x) = ax² + bx + c, a ≠ 0 .*** График - *парабола.*



a) Функция y= ax².

1) Область определения $D(f)$ = R
2) Вершина параболы (0;0)
3) Нули функции $x = 0$
4) 4)Экстремумы: если $a < 0$, то минимум в вершине, если $a > 0$, то максимум в вершине
5) Область значений E(f) = [0; +∞) при $a>0$; E(f) = (-∞; 0] при $a<0$
6) Четность: четная

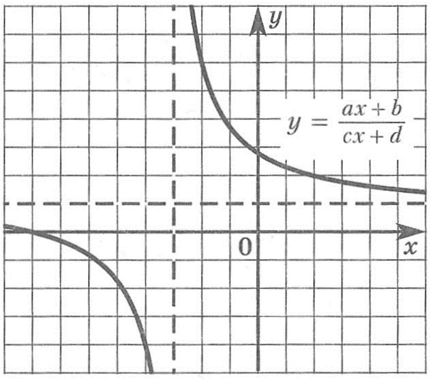
b) Функция y= ax² + bx + c

1) Область определения $D(f)$ = R

2) Вершина параболы $(x_0;y_0)$; $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = -\frac{b^2-4ac}{4a}$
3) Нули функции:

   при $D = b^2 - 4ac \geq 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
   при $D = b^2 - 4ac < 0$ нулей нет
4) Экстремумы: если $a < 0$, то минимум в вершине, если $a > 0$, то максимум в вершине
5) Область значений $E(f) = [y_0; +\infty)$ при $a>0$ $E(f) = -\infty; y_0]$ при $a<0$
6) Четность: ни четная, ни нечетная

3. ***Дробно-линейная*** функция вида $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ - частный случай дробно-рациональной функции. График дробно-линейной функции – *гипербола.*



4. ***Обратная пропорциональность*** $y = \frac{k}{x}$ – это частный случай дробно-линейной функции. График – *гипербола.*

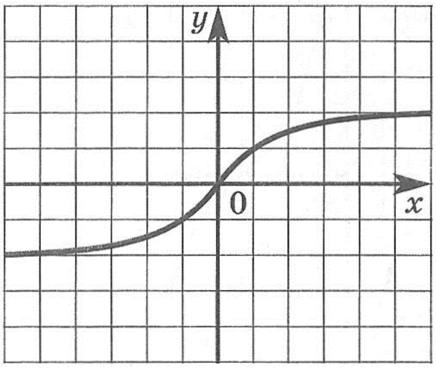
1) Область определения $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2) Область значений
3) Четность: нечетная
4) Монотонность: Функция монотонно убывает при $k > 0$ и возрастает при $k < 0$.
5) Промежутки знакопостоянства: зависят от знака параметра k:
   $k > 0$, то $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$;
   $k < 0$, то $y > 0$ при $x < 0$; $y < 0$ при $x > 0$.

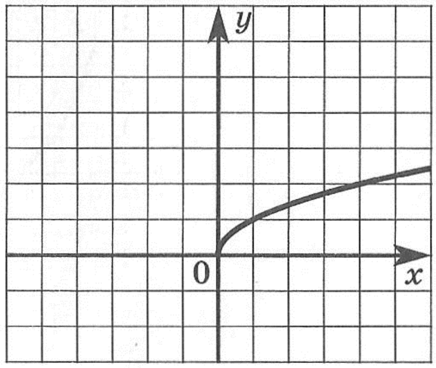
6) Нулей функции нет.
7) Экстремумов нет.

5. ***Иррациональные функции*** вида $f(x) = \sqrt[2n]{x}$, $f(x) = \sqrt[2n+1]{x}$.

$y = \sqrt[2n+1]{x}$



$y = \sqrt[2n]{x}$



а) *Функция*

1) Область определения $D(f) = R$
2) Область значений E(f) = R
3) Четность: нечетная
4) Монотонность: Функция монотонно возрастает на $D(f)$.
5) Промежутки знакопостоянства: $y > 0$ на $D(f)$.
6) Нули функции $x = 0$.
7) Экстремумов нет.

б) *Функция* $y = \sqrt[2n]{x}$

1) Область определения $D(f) =$ [0; +∞)
2) Область значений E(f) = [0; +∞)
3) Четность: ни четная, ни нечетная.
4) Монотонность: Функция монотонно возрастает на $D(f)$.
5) Промежутки знакопостоянства:

   x > 0, то $y > 0$; $y < 0$ при $x < 0$;

   x < 0, то $y > 0$; $y < 0$ при $x > 0$.
6) Нули функции $x = 0$.
7) Экстремумов нет.

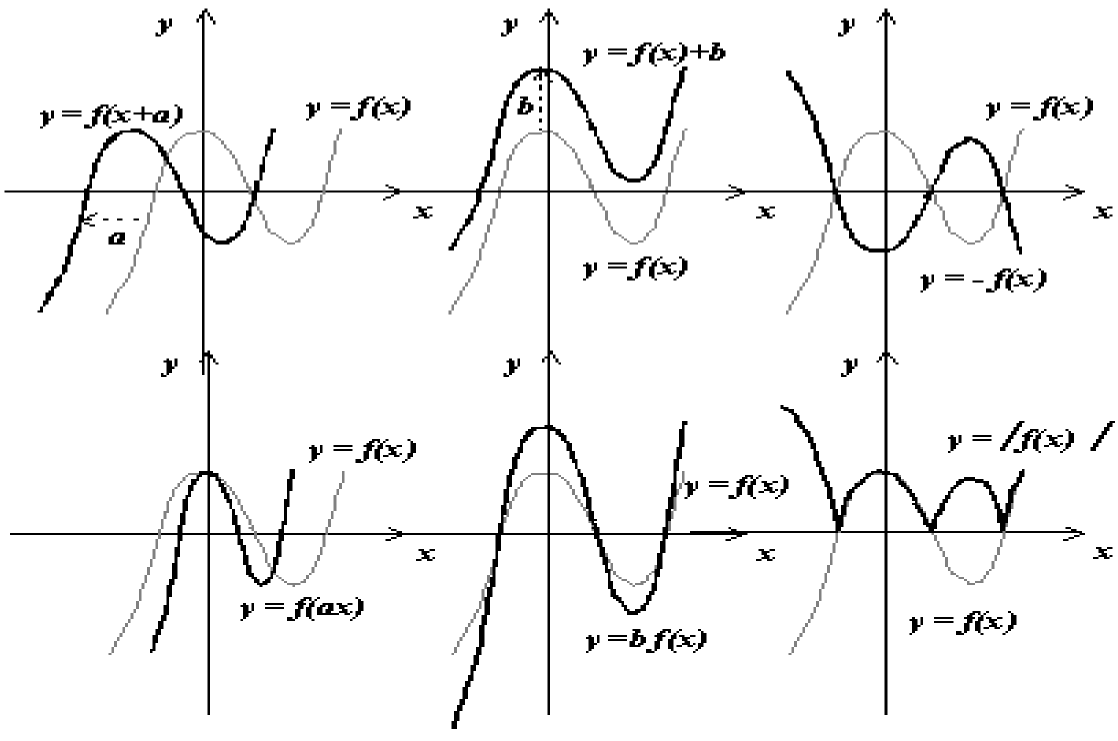
Преобразования графиков функций

Преобразования графиков функций — это линейные преобразования функции $y = f(x)$ или её аргумента x к виду $y = af(kx + b) + m$.

По графику функции $y = f(x)$**,** можно построить график функции $y = af(kx + b) + m$**.**

Общий вид функции	Преобразования
$y = f(x - b)$	***Параллельный перенос*** **графика вдоль оси абсцисс на | b | единиц** • вправо, если $b > 0$; • влево, если $b < 0$.
$y = f(x + b)$	• влево, если $b > 0$; • вправо, если $b < 0$.

$y = f(x) + m$	***Параллельный перенос*** **графика вдоль оси ординат на | m | единиц** • вверх, если m > 0, • вниз, если m < 0.
	Отражение графика
$y = f(-x)$	*Симметричное отражение графика относительно оси* ***ординат.***
$y = -f(x)$	*Симметричное отражение графика относительно оси* ***абсцисс.***
	Сжатие и растяжение графика
$y = f(kx)$	• При $k > 1$ — ***сжатие*** графика к оси ординат в k раз, • при $0 < k < 1$ — ***растяжение*** графика от оси ординат в k раз.
$y = kf(x)$	• При $k > 1$ — ***растяжение*** графика от оси абсцисс в k раз, • при $0 < k < 1$ — ***сжатие*** графика к оси абсцисс в k раз.
	Преобразования графика с модулем
$y = \vert f(x) \vert$	• При $f(x) > 0$ — график остаётся без изменений, • при $f(x) < 0$ — график симметрично отражается относительно оси абсцисс.
$y = f(\vert x \vert)$	• При $x \geq 0$ — график остаётся без изменений, • при $x < 0$ — график симметрично отражается относительно оси ординат.



Пример 1. Найти значение p, при котором точка A(p; 2p + 3) принадлежит графику функции $f(x) = x^2 - 4x + 12$.

1) 3 2) 2 3) – 1 4) 0

Решение.

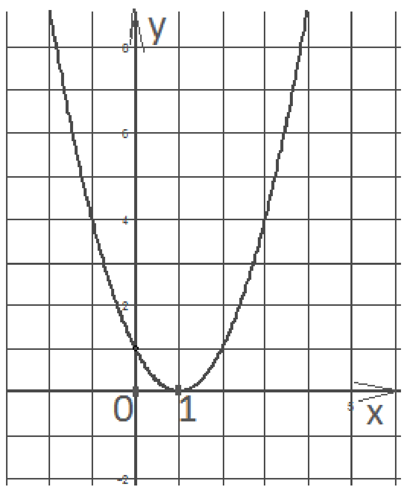
1-й способ: Подставим в формулу функции координаты точки A: $x = p$, $y = 2p + 3$ и решим относительно p уравнение:

$2p + 3 = p^2 – 4p + 12$; $p^2 – 6p + 9 = 0$; $(p – 3)^2 = 0$, откуда $p = 3$.
2-й способ: Для каждого из четырех случаев проверим равенство:
1) Если $p = 3$, то $A(3; 9)$, тогда $9 = 3^2 – 4\cdot3 + 12$; $9 = 9$ (верно).
2) Если $p = 2$, то $A(2; 7)$, тогда $7 = 2^2 – 4\cdot2 + 12$; $7 = 8$ (неверно).
3) Если $p = – 1$, то $A(– 1; 1)$, тогда $1 = (– 1)^2 – 4\cdot(– 1) + 12$; $1 = 18$ (неверно).
4) Если $p = 0$, то $A(0; 3)$, тогда $3 = 0^2 – 4\cdot0 + 12$; $3 = 12$ (неверно).
Из представленных четырех ответов подходит первый.
Ответ 1.

Пример 2. Из функций $y = 3x^2$; $y = 2x^5$; $y = x^4 +1$; $y = (x – 1)^3$ выберите нечетную.
1) $y = 3x^2$; 2) $y = 2x^5$; 3) $y = x^4 +1$; 4) $y = (x – 1)^3$
Решение. Проверим четность по определению:
1) $y(– x) = 3(– x)^2 = 3x^2 = y(x)$, значит функция $y = 3x^2$ четная.
2) $y(– x) = 2(– x)^5 =–2x^5 =– y(x)$, значит функция $y = 2x^5$ нечетная.
3) $y(– x) = (– x)^4 + 1 = x^4 + 1 = y(x)$, значит функция $y = x^4 +1$ четная.
4) $y(– x) = (–x – 1)^3 = (x + 1)^3 \neq y(x) \neq –y(x)$, значит функция $y = (x – 1)^3$ ни четная, ни нечетная. Из представленных четырех ответов подходит второй.
Ответ 2.

Пример 3. Функция задана формулой: $f(x) = x^3 – 4x + 1$. Найдите $f(– 2)$.
1) 1 2) 17 3) 3 4) 12
Решение. $f(– 2) = (– 2)^3 – 4(– 2) + 1 = – 8 + 8 + 1 = 1$.
Из представленных четырех ответов подходит первый.
Ответ 1.

Пример 4. График какой из перечисленных функций изображен на рисунке?



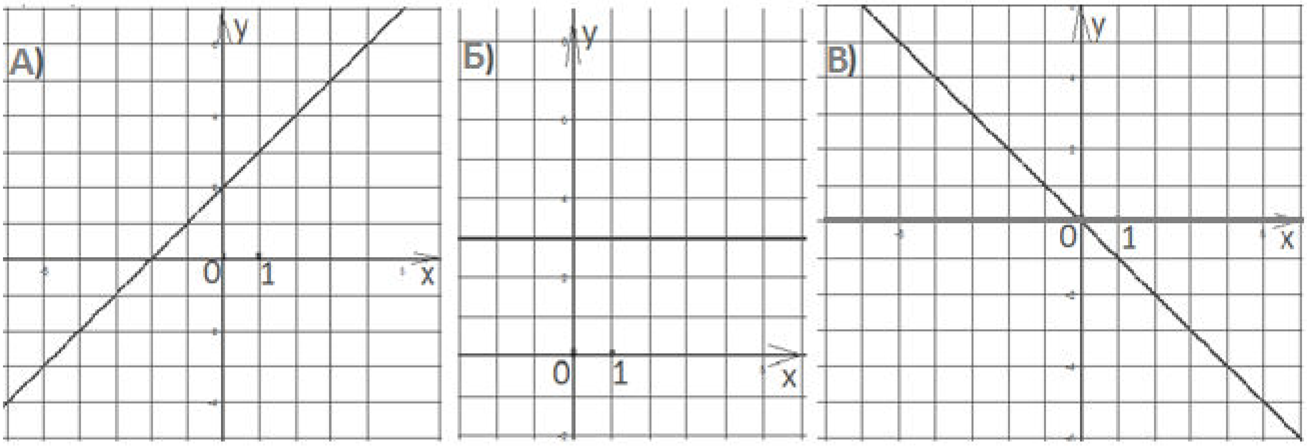
1) $y = -x^2 + x$
2) $y = -(x + 2)^2 + 1$
3) $y = (x + 1)^2 - 1$
4) $y = x^2 - 2x + 1$

Решение. На рисунке изображен график квадратичной функции, полученный сдвигом графика $y = x^2$ на единицу вправо вдоль оси OX, т. е. $y = (x – 1)^2$ или $y = x^2 – 2x + 1$. Из представленных четырех ответов подходит четвертый.
Ответ 4.

Пример 5. Найти координаты точек пересечения графика функции $y = \frac{2}{x-3} + 1$ с осью абсцисс.
1) (0; 1) 2) (1; 0) 3) (1/3; 0) 4) (0,1/3)
Решение.

Точку пересечения графика функции с осью абсцисс найдем из условия y = 0:
$0 = \frac{2}{x-3} + 1$; $\frac{2}{x-3} = -1$; x – 3 = – 2; x = 1. Тогда $y(1) = \frac{2}{1-3} + 1 = -1 + 1 = 0$.
Из представленных четырех ответов подходит второй.
Ответ 2.

Пример 6. По графику функции, представленной на рисунке, найти все значения x, при которых значения функции положительны.

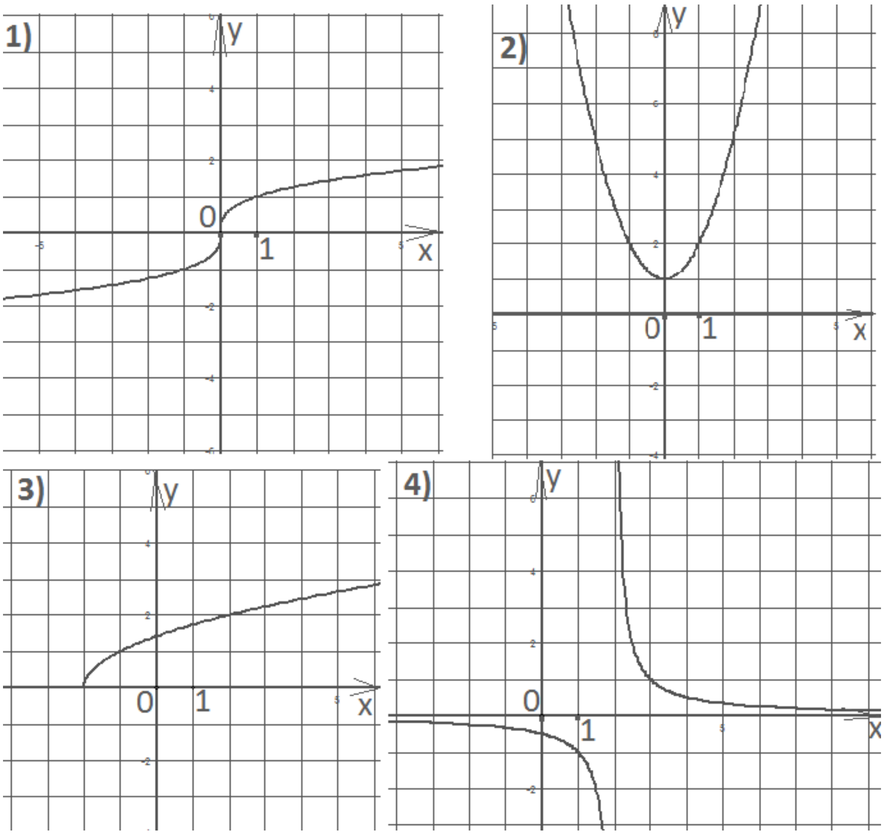


1) А = (– 2; +∞), Б = (–∞; +∞), В = (–∞; 0)
2) А = (–∞; +∞), Б = (– 2; +∞), В = (–∞; 0)
3) А = (–2; +∞), Б = (–∞; 0), В = (– 2; +∞)
4) А = (–∞; +∞), Б =(–∞; 0) , В = (– 2; +∞)

Решение. Задача сводится к нахождению x, при которых y > 0.
Для случая А: y > 0 при x > -2. Для случая Б: y > 0 при любом значении x.
Для случая В: y > 0 при x < 0. Из представленных четырех ответов подходит первый.
Ответ 1.

Пример 7. Соотнесите функции А) $y = x^2 + 1$; Б) $y = \frac{1}{x-2}$; В) $y = \sqrt{x+2}$ с их графиками, изображенными на рисунке.

1) А =2 ; Б = 2 ; В = 3
2) А =3 ; Б = 1; В = 4
3) А = 2; Б = 4; В =3
4) А = 4 ; Б = 2 ; В = 3



Решение.

А) $y = x^2 + 1$ – это график квадратичной функции, полученный сдвигом графика $y = x^2$ на единицу вверх вдоль оси ОУ, ему соответствует второй рисунок.

Б) $y = \frac{1}{x-2}$ – это график гиперболы, полученный сдвигов графика функции $y = 1/x$ сдвигом вдоль оси ОХ вправо на две единицы, ему соответствует четвертый рисунок.

В) $y = \sqrt{x+2}$ – это график функции, полученный сдвигом графика функции $y = \sqrt{x}$ на две единицы влево вдоль оси ОХ, ему соответствует третий рисунок.

Итак, правильный ответ А = 2; Б = 4; В =3 (под номером 3).

Ответ 3.

Пример 8. Найти множество значений функции

1) $[-1;+\infty)$. 2) $[3;+\infty)$. 3) $[-3;+\infty)$ 4) $[1;+\infty)$.

Решение:

– это график функции, полученный сдвигом графика функции $y = \sqrt{x}$ на е единицу влево вдоль оси ОХ. Область значений данной функции . Тогда - это график функции, полученный сдвигом графика последней функции на три единицы вниз вдоль оси ОУ. То есть область значений функции - это интервал $E(y) = [-3;+\infty)$.

Из представленных четырех ответов подходит третий.

Ответ 3.

Пример 9. Найти множество значений функции

1) $[1/3;+\infty)$ 2) $(0; 1/3]$ 3) $[0;3)$ 4) $[0;+\infty)$

Решение: Так как $E(x^2) = [0;+\infty)$, то $E(x^2+3) = [3;+\infty)$. Так как обратная пропорциональность – непрерывная и убывающая функция на этом промежутке, большему значению

аргумента будет соответствовать меньшее значение функции. При стремлении аргумента этой функции к $+\infty$ значение самой функции стремится к нулю:
E $(1/(x^2+3)) = (0; 1/3]$. Из представленных четырех ответов подходит второй.
Ответ 2.

Пример 10. Найти множество значений функции
1) $[3;+\infty)$ 2) $[0; +\infty)$ 3) $[0;)$ 4) $[\sqrt{3};+\infty)$

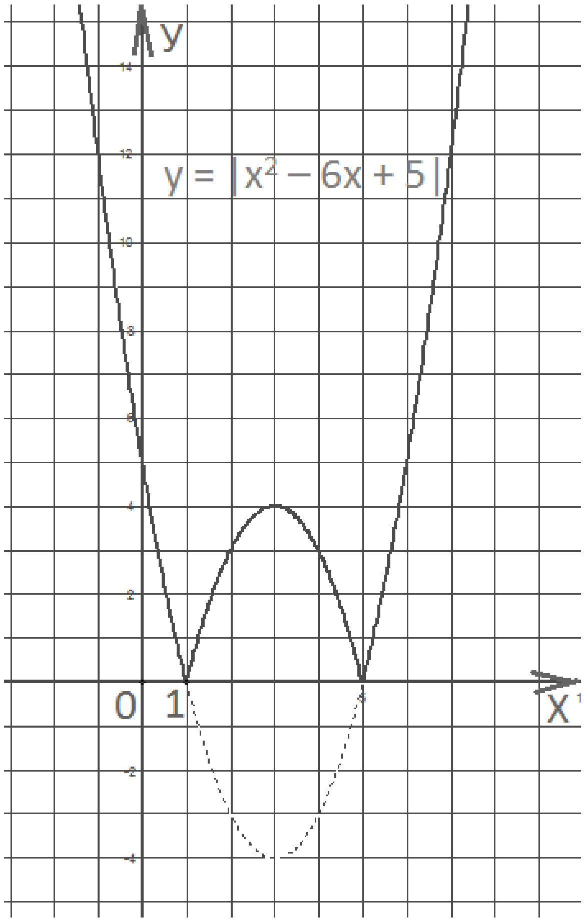
Решение: $E(x^2) = [0;+\infty)$, $E(x^2+3) = [3;+\infty)$. Так как функция $\sqrt{x}$ непрерывна и возрастает на этом промежутке, то E ( ) = $[\sqrt{3};+\infty)$.
Из представленных четырех ответов подходит четвертый.
Ответ 4.

Пример 11. Найти наименьшее значение функции $y = 3 - \frac{4}{1+\sqrt{x-1}}$.
1) 0 2) 1 3) 3 4) – 1
Решение: Разность принимает наименьшее значение при наибольшем значении вычитаемого. Дробь принимает наибольшее значение при наименьшем значении знаменателя. Получаем, что данная функция принимает наименьшее значение при наименьшем значении выражения , находящегося в знаменателе дроби.
E $(\sqrt{x-1}) = [0;+\infty)$, E () = $[1;+\infty)$.
Итак, наименьшее значение знаменателя равно 1. Тогда функция принимает значение, равное −1.
Из представленных четырех ответов подходит четвертый.
Ответ 4.

Построение графиков вида $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$ ***и*** $|y| = f(x)$

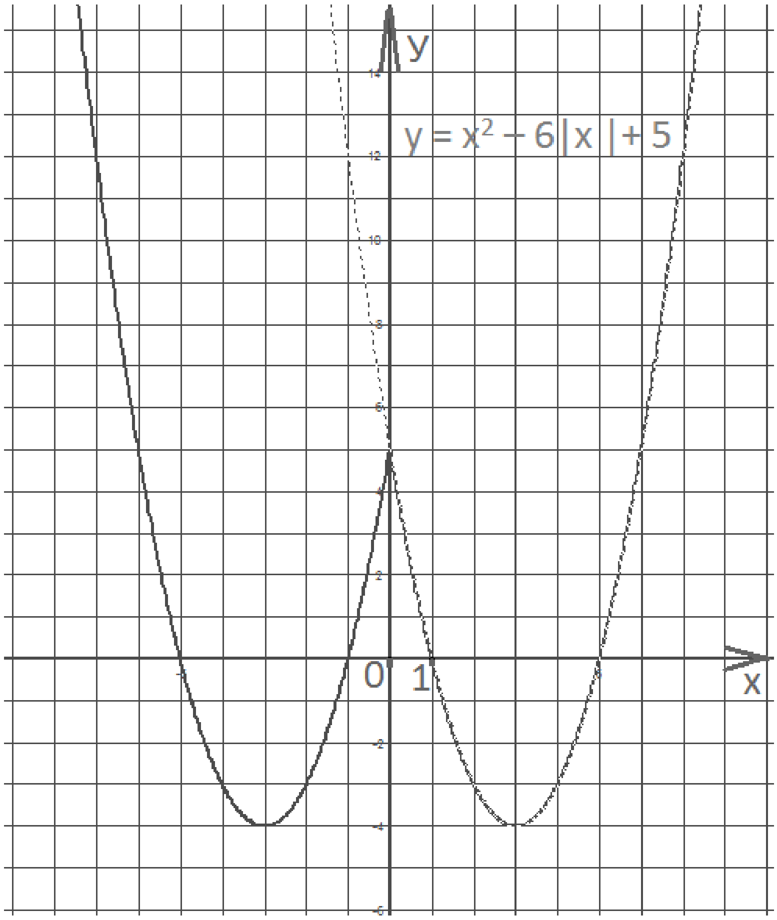
1) Строим сначала график функции $y = f(x)$.
2) Там, где график функции $y = f(x)$ лежит выше оси Ox или на ней, оставляем его без изменения; точки графика, которые лежат ниже оси Ox, заменяем симметричными им относительно оси Ox точками.

Пример 12. Построить график функции $y = |x^2 - 6x + 5|$.
Решение. Построим квадратичную параболу $y = x^2 - 6x + 5$. Ту часть графика, где $y < 0$ зеркально отобразим относительно оси ОХ.



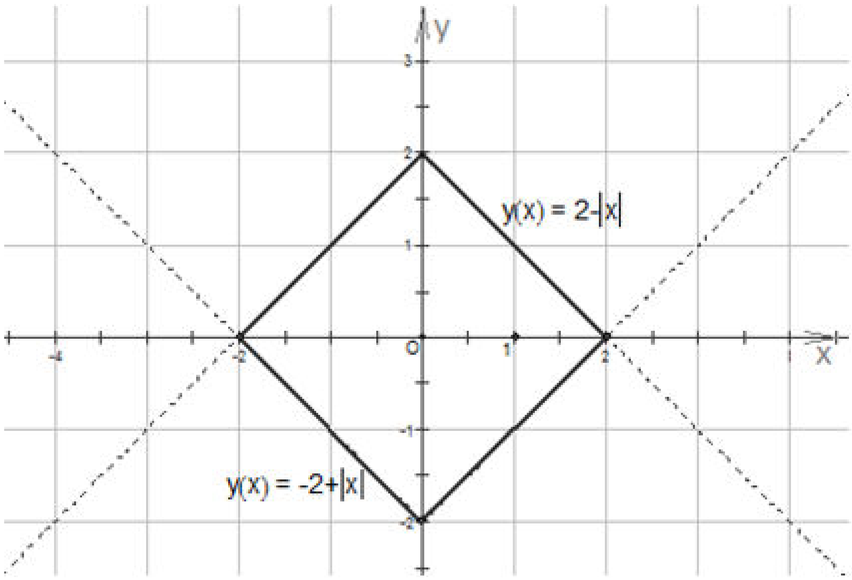
Для построения графика функции $y = f(|x|)$ строим график функции $y = f(x)$ для $x \geq 0$ и отображаем симметрично относительно оси Oy .

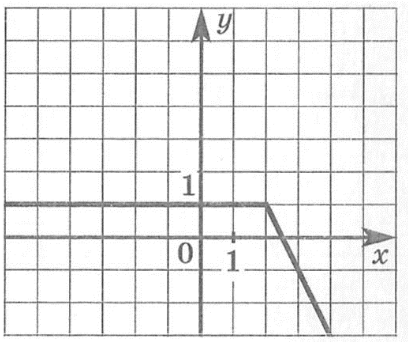
Пример 13. Построить график функции $y = x^2 - 6|x| + 5$.
Решение. Построим квадратичную параболу у = x^2 – 6х + 5 . Ту часть графика, где $x > 0$ зеркально отобразим относительно оси ОУ.



Для построения графика функции $|y| = f(x)$ строим график функции $y = f(x)$ для $f(x) \geq 0$ и симметрично отображаем относительно оси Ox.

Пример 14. Построить график функции $|y| = 2 - |x|$.





Пример 15. График какой функции, из перечисленных, изображен на рисунке?

1) y = -|x - 2| - x + 3; 2) y = -|x + 2| - x – 1;
3) y = -| x + 2|+ x +3; 4) y = |x +2| + x + 1.

Решение: Раскроем по определению модуля скобки, тогда получим следующие уравнения:

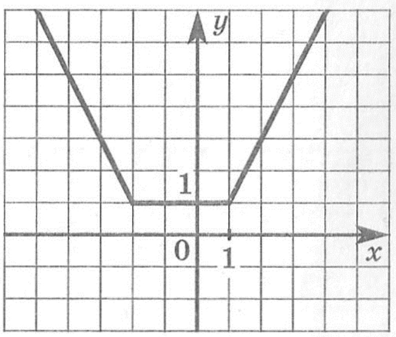
1) $y = \begin{cases} 1, & \text{при } \mathbf{x} \le 2 \\ -2\mathbf{x} + 5, & \text{при } \mathbf{x} > 2 \end{cases}$; 2)

3) 4)

Очевидно, что графику удовлетворяет уравнение под номером 1.

Ответ 1.

Пример 16. График какой функции, из перечисленных ниже, изображен на рисунке?



1) y = |x +2| +|x - 1| - 2
2) y = |x -2| + |x + 1| + 2
3) y = -|x +2| + |x – 1| + 2
4) y = -|x +2| - |x – 1| - 2

Решение: Раскроем по определению модуля скобки, тогда получим следующие уравнения:

1) $y = \begin{cases} -2\mathbf{x} - 3, & \text{при } \mathbf{x} \le -2, \\ 1, & \text{при } -2 < x \le 1, \\ 2\mathbf{x} - 1, & \text{при } \mathbf{x} > 1 \end{cases}$ 2)

3) 4)

Очевидно, что графику удовлетворяет уравнение под номером 1.

Ответ 1.