Тема №9 «Функция. Свойства функций»

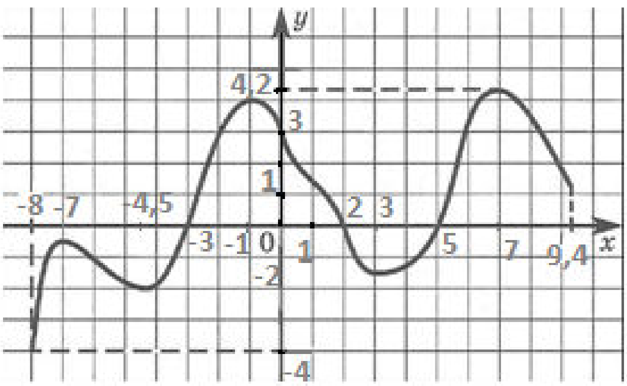
Пусть X — некоторое непустое множество действительных чисел. И пусть указан закон f, по которому каждому числу x ∊ X ставится в соответствие единственное число $y \in Y$, обозначаемое $f(x)$, то есть $y = f(x)$. Тогда говорят, что на множестве X задана ***числовая функция f***. Или, что на множестве *X* задана функция $y = f(x)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости с координатами (x; f(x)), где $x \in D(f)$.

Свойства функции

1. *Область определения функции* — это множество всех значений переменной x, которые имеют соответствующие им значения функции. Обозначают: D(f).
   Число $x \in D(f)$ называется *аргументом функции.*

Пример 1. Найти область определения функции по графику, изображенному на рисунке:



1) [– 4; 4,2]
2) [– 8; 9,4]
3) (– 3; 2)∪(5; 9,4)
4) (– 8; 9,4)

Решение.
На графике область определения — это промежутки на оси OX, над которыми (или под которыми) имеются части графика, т.е. это отрезок D(f)= [−8; 9,4] . Итак, верный второй ответ.

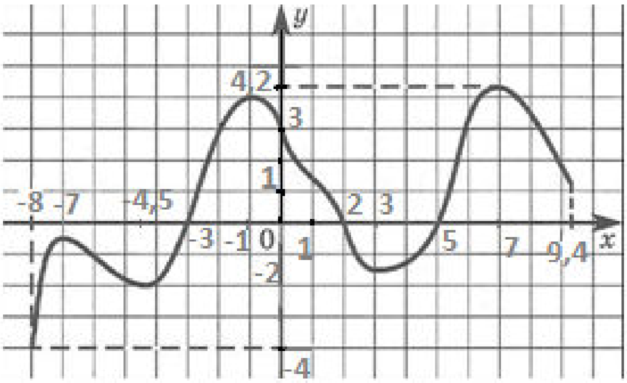
Ответ 2.

2. *Область значений функции* - это множество всех ее значений y. Обозначают: E(f).

На графике область значений функции — это промежутки на оси OY, слева или справа от которых (в горизонтальной полосе) находятся части графика.

Число y = f(x) ∊ E(f) называют *значением функции*.

Пример 2. Найти область значения функции по графику, изображенному на рисунке:



1) [−4; 4,2]
2) [−8; 9,4]
3) (−3; 2) ∪ (5; 9,4)
4) (−4; 4,2)

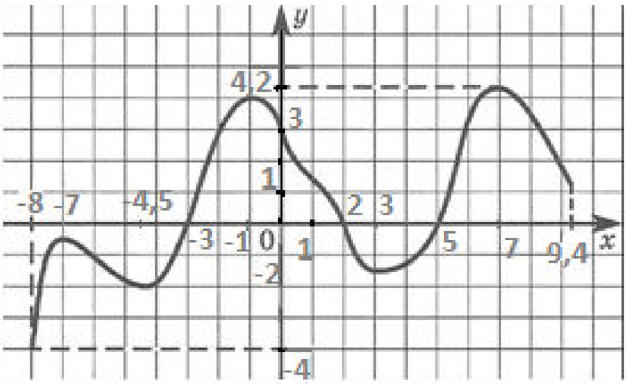
Решение. На графике область значений функции — это промежутки на оси OY, слева или справа от которых (в горизонтальной полосе) находятся части графика, т.е. это отрезок E(f) = [−4; 4,2] .
Итак, верный первый ответ.

Ответ 1.

3. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей*, если для любой пары значений аргументов x_1, x_2 из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функцию можно назвать *возрастающей* на промежутке, если, большему из любых двух взятых из него чисел всегда соответствует большее значение функции.

Пример 3. Найти промежутки возрастания функции по графику, изображенному на рисунке:



1) $[-7; -4,5] \cup [-1; 3] \cup [7; 9,4]$
2) $[-8; -7] \cup [-4,5; -1] \cup [3; 7]$
3) $(-3; 2) \cup (5; 9,4)$
4) $(-8; -3) \cup (2; 5)$

Решение. Проще говоря, для графика функцию можно назвать возрастающей на промежутке, если при движении по нему карандашом слева направо карандаш будет подниматься вверх.

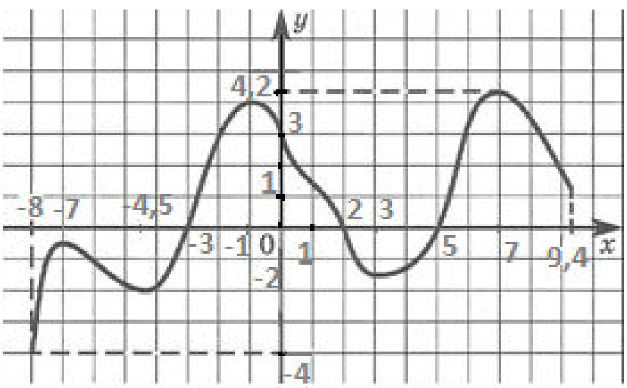
В нашем случае функция возрастает при $x \in [-8;-7] \cup [-4,5;-1] \cup [3;7]$, т.е. верный второй ответ.

Ответ 2.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей*, если для любой пары значений аргументов x_1, x_2 из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Функцию можно назвать убывающей на промежутке, если из любых двух взятых из него чисел большему из них всегда соответствует меньшее значение функции.

Пример 4. Найти промежутки убывания функции по графику, изображенному на рисунке:



1) $[-7;-4,5] \cup [-1;3] \cup [7;9,4]$
2) $[-8;-7] \cup [-4,5;-1] \cup [3;7]$
3) $(-3;2) \cup (5;9,4)$
4) $(-8;-3) \cup (2;5)$

Решение. Проще говоря, для графика функцию можно назвать убывающей на промежутке, если при движении по нему карандашом слева направо карандаш будет опускаться вниз.

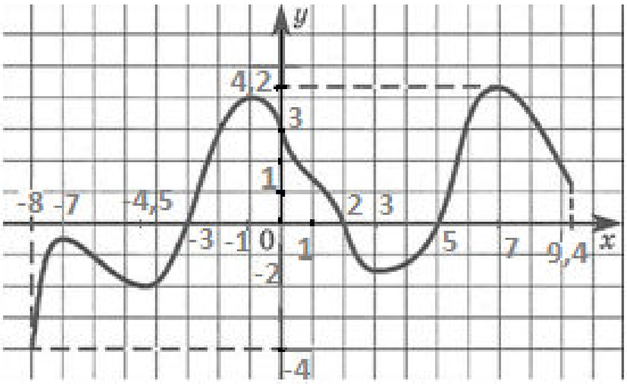
В нашем случае функция убывает при $x \in [-7;-4,5] \cup [-1;3] \cup [7;9,4]$, т.е. верный первый ответ.

Ответ 1.

4. *Промежутки знакопостоянства* — промежутки, на которых значения функции имеют постоянный знак (положительный или отрицательный).

Промежуток положительного знака — это множество значений переменной x, у которых соответствующие значения функции больше нуля (y>0).

Пример 5. Найти промежутки, где значения функции положительны по графику, изображенному на рисунке:



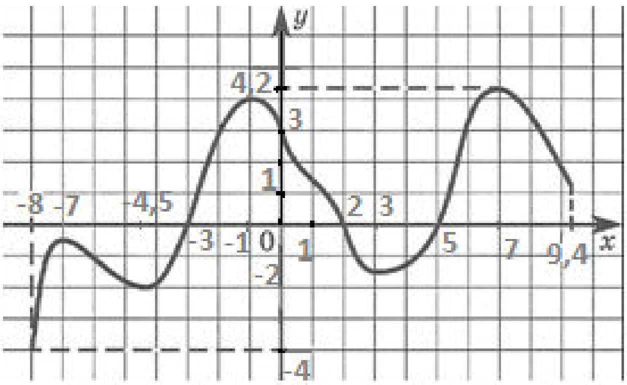
1) $[-7;-4{,}5] \cup [-1;3] \cup [7;9{,}4]$
2) $[-8;-7] \cup [-4{,}5;-1] \cup [3;7]$
3) $(-3;2) \cup (5;9{,}4)$
4) $(-8;-3) \cup (2;5)$

Решение. На графике – это части оси абсцисс, у которых соответствующие кусочки графика выше оси OX. Для нашего примера функция положительна при x $\in (-3;2) \cup (5;9{,}4)$.

Итак, верный третий ответ.

Ответ 3.

Пример 6. По графику, изображенному на рисунке, найти количество целых значений абсцисс, в которых значения функции положительны.



1) 10
2) 9
3) 8
4) 7

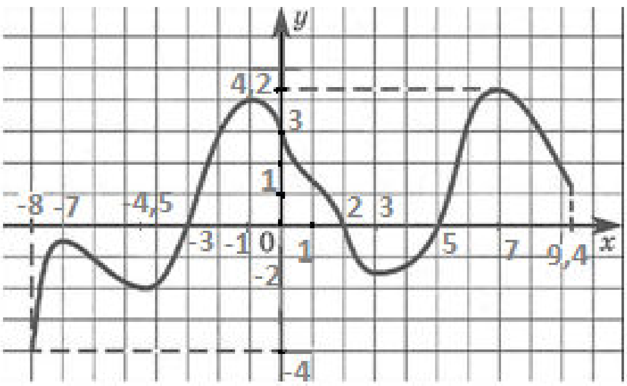
Решение. Для нашего примера y > 0 при x $\in (-3;2) \cup (5;9{,}4)$. Целые значения абсцисс – это: – 2; – 1; 0; 1; 6; 7; 8; 9, всего 8 штук.

Итак, верный третий ответ.

Ответ 3.

Промежуток отрицательного знака — это множество тех значений переменной x, у которых соответствующие значения функции меньше нуля (y < 0).

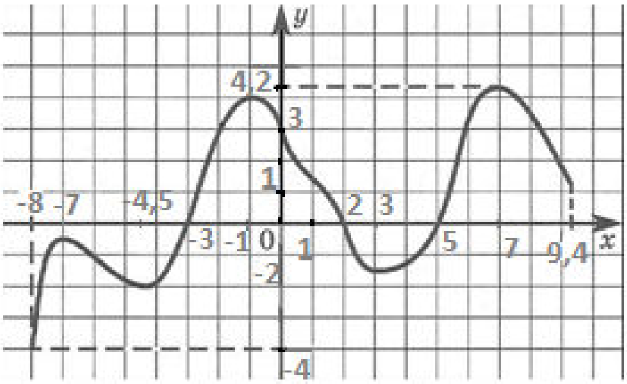
Пример 7. Найти промежутки, где значения функции отрицательны по графику, изображенному на рисунке:



1) $[-7;-4{,}5] \cup [-1;3] \cup [7;9{,}4]$
2) $[-8;-7] \cup [-4{,}5;-1] \cup [3;7]$
3) $(-3;2) \cup (5;9{,}4)$
4) $(-8;-3) \cup (2;5)$

Решение. На графике – это части оси абсцисс, у которых соответствующие кусочки графика ниже оси ОХ. Для нашего примера функция отрицательна при х ϵ $(-8;-3)\cup(2;5)$.
Итак, верный четвертый ответ.
Ответ 4.

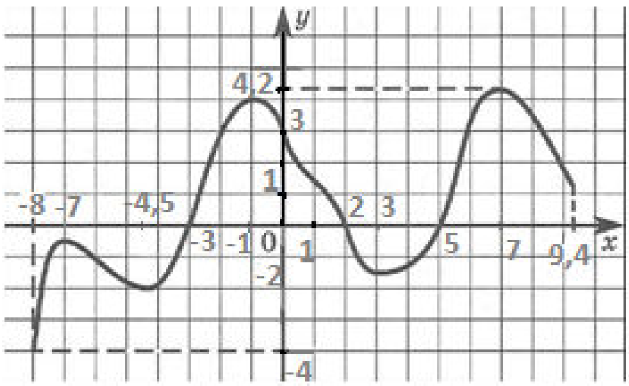
Пример 8. По графику, изображенному на рисунке, найти промежуток наибольшей длины, где значения функции отрицательны.



1) $[-7;-4{,}5]$
2) $[3;7]$
3) $(5;9{,}4)$
4) $(2;5)$
5) $(-8;-3)$

Решение. Для нашего примера у < 0 при х ϵ $(-8;-3)\cup(2;5)$. Длина первого промежутка равна $-3-(-8)=5$, а второго $5-2=3$. $5>3$, поэтому верный четвертый ответ.
Ответ 4.

5. *Нули функции* – это значения переменной х, при которых у (х) = 0.



Пример 9. Найти нули функции по графику, изображенному на рисунке:

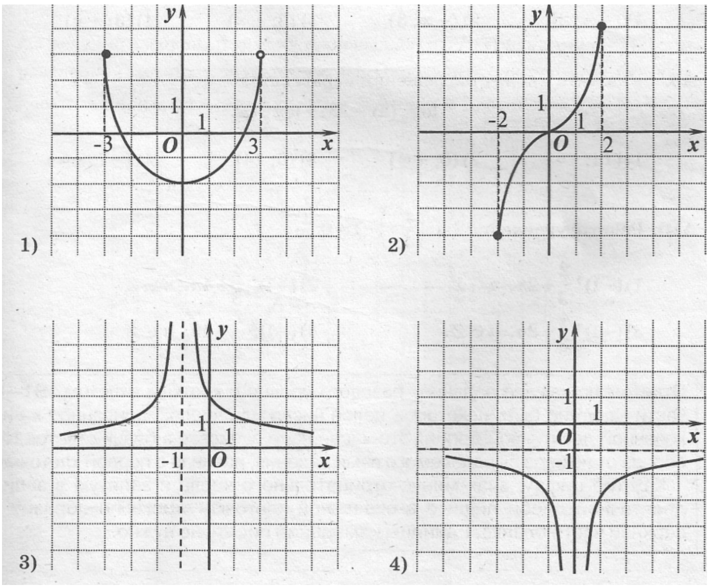
1) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$
2) $x_1 = -4{,}5$, $x_2 = 3$
3) $x_1 = -7$, $x_2 = -1$, $x_3 = 7$
4) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$

Решение. По графику нули определяют как абсциссы точек пересечения графика с осью ОХ. Для нашего примера нули функции это точки $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$. Итак, верный четвертый ответ.
Ответ 4.

6. *Четность и нечетность функции*.

Функция называется *четной*, если ее график симметричен относительно оси ОУ и для любого х ϵ D(f) верно: -х ϵ D(f) и f(-x) = f(x). То есть функция называется четной, если любым двум противоположным значениям аргумента, из области определения, соответствуют равные значения функции.

Пример 10. Указать рисунок, на котором изображен график четной функции:

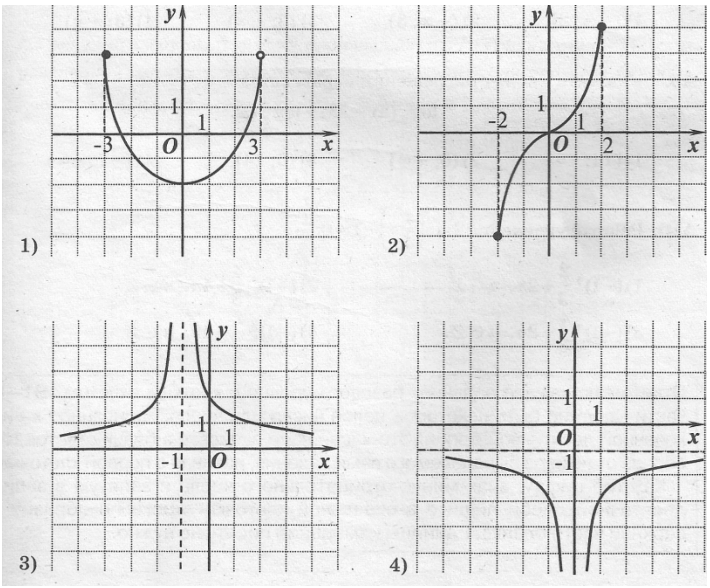


1) 4
2) 3
3) 2
4) 1

Решение. На графике четная функция имеет ось симметрии Oy. (Симметрия графика относительно оси означает то, что он состоит из двух частей, одна из которых является зеркальным отражением другой). Итак, верный первый ответ.
Ответ 1.

Функция называется *нечетной*, если ее область определения симметрична относительно нуля и для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = - f(x)$. То есть функция называется *нечетной*, если любым двум противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции.

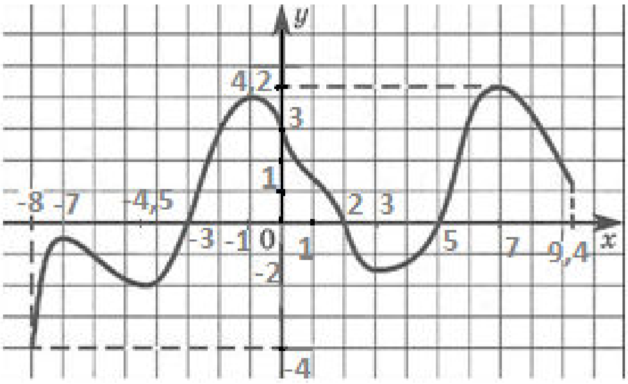
Пример 11. Указать рисунок, на котором изображен график нечетной функции:



1) 4
2) 3
3) 2
4) 1

Решение. На графике нечетная функция симметрична относительно начала координат. В нашем случае функция нечетная на втором графике, т. е. верный ответ 3.
Ответ 3.

Произведение или частное двух четных функций – есть функция четная.
Произведение или частное двух нечетных функций – есть функция четная.
Произведение или частное двух функций, одна из которых четная, а другая нечетная – есть функция нечетная.



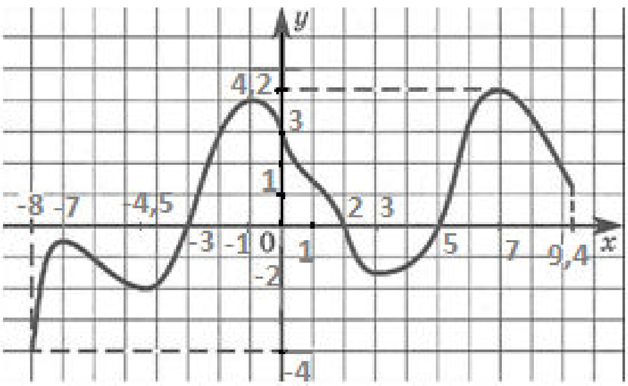
Пример 12. Определить четность или нечетность функции по рисунку.

1) нечетная
2) четная
3) нельзя определить
4) ни четная, ни нечетная

Решение. Функция нашего примера - ни четная, ни нечетная, т. е. верный четвертый ответ.
Ответ 4.

7. *Точки экстремума функции (точки максимума и минимума).*

Точка x_0 называется *точкой минимума*, если для всех $x \in D(f)$ в некоторой окрестности этой точки выполняется равенство $f(x) \geq f(x_0)$.

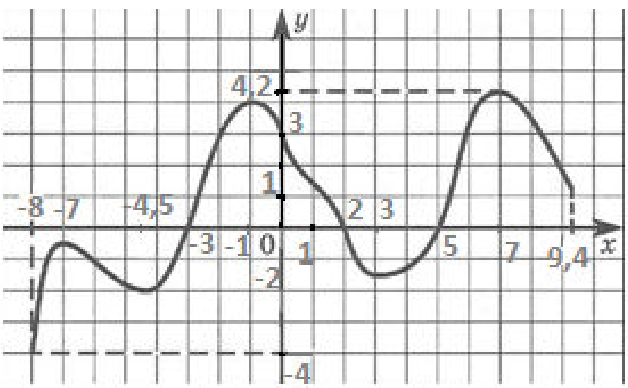


Пример 13. Указать по графику, изображенному на рисунке, точки минимума.

1) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$
2) $x_1 = -4{,}5$, $x_2 = 3$
3) $x_1 = -7$, $x_2 = -1$, $x_3 = 7$
4) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$

Решение. На графике точки минимума - это абсциссы, в которых график выглядит как «ямка».
Для нашего примера точки минимума – это: $x_1 = -4{,}5$, $x_2 = 3$. Итак, верный второй ответ.
Ответ 2.

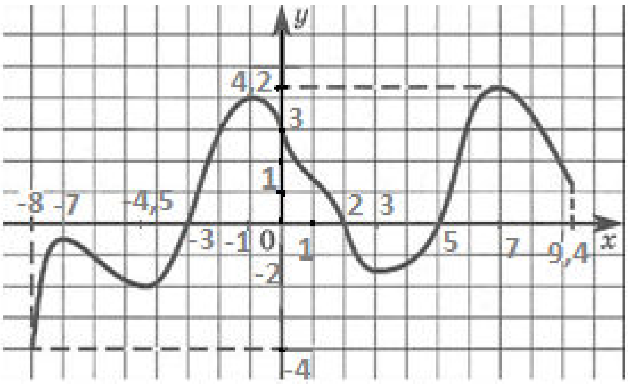
Точка x_0 называется *точкой максимума*, если для всех $x \in D(f)$ в некоторой окрестности этой точки выполняется равенство $f(x) \leq f(x_0)$.



Пример 14. Указать по графику, изображенному на рисунке, точки максимума.

1) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$
2) $x_1 = -4{,}5$, $x_2 = 3$
3) $x_1 = -7$, $x_2 = -1$, $x_3 = 7$
4) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$

Решение. На графике точки максимума - это абсциссы, в которых график выглядит как «горка». Для нашего примера точки максимума – это $x_1 = -7$, $x_2 = -1$, $x_3 = 7$. Итак, верный третий ответ.
Ответ 3.



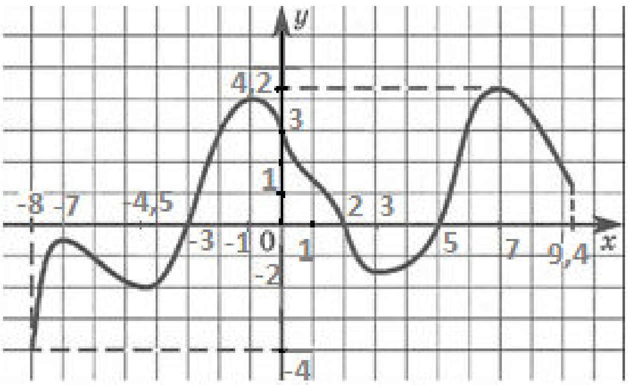
Пример 15. Указать по графику, изображенному на рисунке, количество точек экстремума.

1) 3
2) 7
3) 5
4) 6

Решение. Для нашего примера точки максимума – это: x_1 = -7, x_2 = -1, x_3 = 7, а точки минимума – это: x_1 = -4,5, x_2 = 3. Всего точек экстремума 5 штук, т. е. верный третий ответ.
Ответ 3.

8. *Наименьшее и наибольшее значение функции.*

Число y = t называется *наименьшим значением* функции на промежутке [*a,b*], если для любого значения аргумента x ϵ [*a,b*] из этого промежутка верно неравенство t $\geq$ f(x).

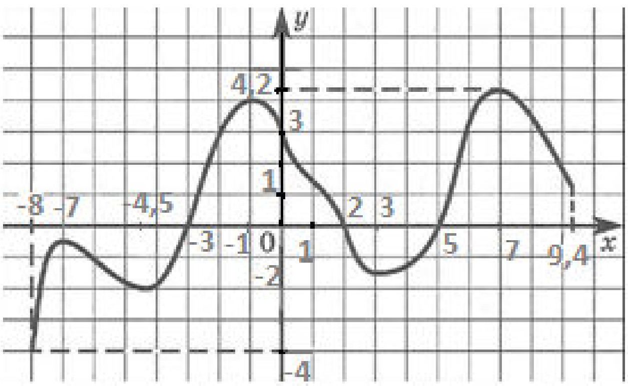


Пример 16. Указать по графику, изображенному на рисунке, наименьшее значение функции.

1) y = 4
2) y = – 2
3) y = – 4
4) y = 4,2

Решение. На графике область значений функции — это промежутки на оси OY, слева или справа от которых (в горизонтальной полосе) находятся части графика, т.е. это отрезок E(f) = $[-4; 4{,}2]$. Наименьшее значение функции – это левое значение данного промежутка. Для нашего примера наименьшее значение функции на промежутке $[-8; 9{,}4]$ равно $y_{н/м}$ = – 4, т. е. верный третий ответ.
Ответ 3.

Число y = t называется *наибольшим значением* функции на промежутке [*a,b*], , если для любого значения аргумента x ϵ [*a,b*] из этого промежутка верно неравенство t $\leq$ f(x).



Пример 17. Указать по графику, изображенному на рисунке, наибольшее значение функции.

1) y = 4
2) y = – 2
3) y = – 4
4) y = 4,2

Решение. На графике область значений функции — это промежутки на оси OY, слева или справа от которых (в горизонтальной полосе) находятся части графика, т.е. это отрезок E(f) = $[-4; 4{,}2]$. Наибольшее значение функции –

это правое значение данного промежутка. Для нашего примера наибольшее значение функции на промежутке $[-8; 9,4]$ равно $y_{н/б} = 4,2$, т. е. верный четвертый ответ.
Ответ 4.