Тема № 8 «Арифметический корень».

Арифметический корень n-ой степени

Если $a \geq 0$ и n – натуральное число большее 1, то существует только одно <u>неотрицательное</u> число x такое, что выполняется равенство $x^n = a$. Это число x называется **арифметическим корнем** n-ой степени из неотрицательного числа a и обозначается $x = \sqrt[n]{a}$.

Пример 1.

$$\sqrt{49} = 7 - \textit{верное равенство}$$
$$\sqrt{49} = \pm 7 - \textit{неверное равенство}$$
$$\sqrt{49} = -7 - \textit{неверное равенство}$$

Если n – нечетное натуральное число большее 1 и $a < 0$, то под $\sqrt[n]{a}$ понимают такое <u>отрицательное</u> число x, что $x = \sqrt[n]{a}$.

Пример 2. Вычислить $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Из определения следует, что если в алгебраическом выражении есть корни четной степени, то подкоренные выражения таких корней должны быть неотрицательными, что учитывается при определении области определения алгебраического выражения.

Пример 3. Найти область определения $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x+3}$.

Область определения выражения $x^2 - 1 \geq 0$, $(x - 1)(x + 1) \geq 0$, $x \geq 1$, $x \leq -1$.

Свойства арифметического корня

Если n – натуральное число, $a \geq 0$, $b \geq 0$, то:

1°) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

2°) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, если $b \neq 0$.

3°) Если n – четное число т.е. n = 2k, то $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$

Замечание 1. Если $a < 0$ и $b < 0$ и $ab > 0$, то свойства 1° и 2° принимают вид

3.1°) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|}\sqrt[n]{|b|}$

3.2°) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$

Замечание 2. Если показатели корней нечетные числа, то свойства 1°, 2° выполняются для $a < 0$ или $b < 0$ и $ab < 0$.

Пример 4. Из чисел $3\sqrt{2}$, $\sqrt{15}$, 4, $5\sqrt{3}$ выберите наибольшее.

1) 4 2) $\sqrt{15}$ 3) $5\sqrt{3}$ 4) $3\sqrt{2}$

Решение. $3\sqrt{2} = \sqrt{(9\cdot 2)} = \sqrt{18}$, $4 = \sqrt{16}$, $5\sqrt{3} = \sqrt{(25\cdot 3)} = \sqrt{75}$.

Очевидно, что $\sqrt{75} > \sqrt{18} > \sqrt{16} > \sqrt{15}$, поэтому верный ответ 3.

Ответ 3.

Пример 5. Вычислить: $\sqrt{1\frac{24}{25}} - 3\sqrt{0{,}09}$.

1) 0,3 2) 0,5 3) – 0,3 4) – 0,5

Решение. $\sqrt{1\frac{24}{25}} - 3\sqrt{0{,}09} = \sqrt{\frac{49}{25}} - 3\cdot 0{,}3 = \frac{7}{5} - 0{,}9 = 1{,}4 - 0{,}9 = 0{,}5$

Ответ 2.

Пример 6. Упростить выражение: $(8\sqrt{18} + 6\sqrt{24} - \sqrt{72}) : (2\sqrt{6})$.

1) $3\sqrt{3} - 12$ 2) 12 3) $3\sqrt{3} - 4$ 4) $3\sqrt{3} + 6$

Решение.

$$\frac{8\sqrt{18}}{2\sqrt{6}} + \frac{6\sqrt{24}}{2\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{72}}{2\sqrt{6}} = 4\sqrt{\frac{18}{6}} + 3\sqrt{\frac{24}{6}} - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{72}{6}} =$$

$$= 4\sqrt{3} + 6 - \frac{\sqrt{12}}{2} = 4\sqrt{3} + 6 - \sqrt{3} = 3\sqrt{3} + 6$$

Ответ 4.

Пример 7. Сократить дробь $\frac{64-t}{8-\sqrt{t}}$, если $\sqrt{t} \neq 8$.

1) $8 - \sqrt{t}$ 2) $1/(8 + \sqrt{t})$ 3) $8 + t$ 4) $8 + \sqrt{t}$

Решение. $\frac{64-t}{8-\sqrt{t}} = \frac{(8-\sqrt{t})(8+\sqrt{t})}{8-\sqrt{t}} = 8 + \sqrt{t}$.

Ответ 4.

Пример 8. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $A = \frac{1}{\sqrt{7} - 2\sqrt{2}}$.

Решение: В знаменателе имеем иррациональность 2-ой степени, поэтому помножим и числитель, и знаменатель дроби на сопряженное выражение , то есть сумму чисел $\sqrt{7}$ и $2\sqrt{2}$, тогда в знаменателе будем иметь разность квадратов, которая и ликвидирует иррациональность.

$$A = \frac{1\cdot\left(\sqrt{7} + 2\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{7} - 2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7} + 2\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{7} + 2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{7}\right)^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7} + 2\sqrt{2}}{7 - 8} = \frac{\sqrt{7} + 2\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{7} - 2\sqrt{2}$$

Ответ $A = -\sqrt{7} - 2\sqrt{2}$.

Пример 9. Упростите, исключив иррациональность знаменателя $\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(4+\sqrt{15})}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

1) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ 2) 1 3) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ 4) -1

Решение.

$$\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(4+\sqrt{15})}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2(4+\sqrt{15})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{(5-2\sqrt{15}+3)(4+\sqrt{15})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{2(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})}{5-3} = \frac{2(16-15)}{2} = 1$$

Ответ 2.

Пример 10. Вычислить: $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$.

1) $2+\sqrt{3}$ 2) $1/(2-\sqrt{3})$ 3) $2-\sqrt{3}$ 4) $-2+\sqrt{3}$

Решение. $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = |\sqrt{3}-2| = 2-\sqrt{3}$, т.к. $\sqrt{3}-2 < 0$, то $|\sqrt{3}-2| = -(\sqrt{3}-2) = 2-\sqrt{3}$.

Ответ 3.

Пример 11. Упростить выражение: $(\sqrt{32}+\sqrt{45}-\sqrt{98})(\sqrt{72}-\sqrt{500}-\sqrt{8})$

Решение. Используя свойства арифметического корня, упростим каждый из имеющихся радикалов:

$$\sqrt{32} = \sqrt{16\cdot 2} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{45} = \sqrt{9\cdot 5} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{98} = \sqrt{49\cdot 2} = \sqrt{49}\cdot\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72} = \sqrt{36\cdot 2} = \sqrt{36}\cdot\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{500} = \sqrt{100\cdot 5} = \sqrt{100}\cdot\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$(4\sqrt{2}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(6\sqrt{2}-10\sqrt{5}-2\sqrt{2}) = (3\sqrt{5}-3\sqrt{2})(4\sqrt{2}-10\sqrt{5}) =$$

$$= 6(\sqrt{5}-\sqrt{2})(2\sqrt{2}-5\sqrt{5}) = 6(2\sqrt{10}-\sqrt{5}\cdot 5\sqrt{5}-\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{5}) =$$

$$= 6(2\sqrt{10}-25-4+5\sqrt{10}) = 6(7\sqrt{10}-29)$$

Ответ $6(7\sqrt{10}-29)$.

Пример 12. Упростить выражение $\sqrt{27-10\sqrt{2}}$

Решение: Выражение упростится, если окажется, что под этим корнем содержится полный квадрат разности или суммы каких-нибудь чисел.

Представим $\sqrt{27-10\sqrt{2}}$ в виде полного квадрата. Для этого представим

$$10\sqrt{2} = 2\cdot 5\sqrt{2}$$

$$27 = 25+2 = 5^2+\left(\sqrt{2}\right)^2$$

тогда $27-10\sqrt{2} = 5^2-2\cdot 5\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2 = (5-\sqrt{2})^2$

Итак, $\sqrt{27-10\sqrt{2}} = \sqrt{(5-\sqrt{2})^2}$

По свойству 3° имеем $\sqrt{(5-\sqrt{2})^2} = |5-\sqrt{2}|$

Т.к. $5 > \sqrt{2}$, то $5 - \sqrt{2} > 0$, тогда по определению модуля $|5-\sqrt{2}| = 5-\sqrt{2}$

Ответ $5-\sqrt{2}$.

Пример 13. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$

Решение: Имеем иррациональность 3-ей степени, поэтому и числитель, и знаменатель умножим на неполный квадрат суммы чисел $\sqrt{2}$ и 1, тогда в знаменателе получим разность кубов, которая и ликвидирует иррациональность.

$$\frac{1\cdot\left(\left(\sqrt[3]{2}\right)^2+\sqrt[3]{2}\cdot 1+1^2\right)}{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{2}\right)^2+\sqrt[3]{2}\cdot 1+1^2\right)} = \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1^3} = \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{2-1^3} = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$$

Ответ $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$.

Пример 14. Упростить выражение

$$f(a,b)=\sqrt{\frac{a+b^2}{b}+2\sqrt{a}}-\sqrt{\frac{a+b^2}{b}-2\sqrt{a}}, \quad где \quad a\geq 0, b>0$$

Решение: Приведем дроби, стоящие под знаками корня к общему знаменателю

$$f(a,b)=\sqrt{\frac{a+b^2+2\sqrt{a}\cdot b}{b}}-\sqrt{\frac{a+b^2-2\sqrt{a}\cdot b}{b}}$$

В числителе первой дроби стоит полный квадрат суммы, а в числителе второй дроби – полный квадрат разности $\sqrt{a}$ и b : $f(a,b)=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{a}+b\right)^2}{b}}-\sqrt{\frac{\left(\sqrt{a}-b\right)^2}{b}}$

Воспользуемся свойством арифметического корня

$$f(a,b)=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{a}+b\right)^2}}{\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{\left(\sqrt{a}-b\right)^2}}{\sqrt{b}}=\frac{\left|\sqrt{a}+b\right|-\left|\sqrt{a}-b\right|}{\sqrt{b}}$$

Так как $\sqrt{a}\geq 0$ и $b>0$, то $\sqrt{a}+b>0$, а значит $\left|\sqrt{a}+b\right|=\sqrt{a}+b$.

$$f(a,b)=\frac{\sqrt{a}+b-\left|\sqrt{a}-b\right|}{\sqrt{b}}$$
.

Так как $\sqrt{a}-b$ может быть как отрицательным, так и положительным, рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{a}-b\geq 0$, тогда $\sqrt{a}\geq b$. В этом случае $\left|\sqrt{a}-b\right|=\sqrt{a}-b$ и

$$f(a,b)=\frac{\sqrt{a}+b-\left(\sqrt{a}-b\right)}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+b-\sqrt{a}+b}{\sqrt{b}}=\frac{2b}{\sqrt{b}}=2\sqrt{b}$$

2) $\sqrt{a}-b<0$, тогда $\sqrt{a}<b$.

В этом случае $\left|\sqrt{a}-b\right|=-\sqrt{a}+b$ и

$$f(a,b)=\frac{\sqrt{a}+b-\left(-\sqrt{a}+b\right)}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+b+\sqrt{a}-b}{\sqrt{b}}=\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=2\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Ответ: $f(a,b)=\begin{cases}2\sqrt{b}, & если \quad \sqrt{a}\geq b\\ 2\sqrt{\frac{a}{b}}, & если \quad \sqrt{a}<b\end{cases}$.