Тема № 6 «Многочлены. Преобразование выражений».

Одночлен – это произведение двух или нескольких сомножителей, каждый из которых либо число, либо буква, либо степень буквы. Например, $3a^2$; bd^3; $-17abc$ - одночлены. Единственное число или единственная буква также считаются одночленом. Одночлен называется представленным ***в стандартном виде***, если он представлен в виде произведения числового множителя на первом месте и степеней различных переменных. Числовой множитель у одночлена стандартного вида называется ***коэффициентом одночлена***, сумму показателей степени переменных называют ***степенью одночлена*** . Одночлены называются ***подобными***, если они одинаковы или отличаются лишь коэффициентами. Поэтому, если два или несколько одночленов имеют одинаковые буквы или их степени, они также подобны.
Если среди суммы одночленов есть подобные, то сумма может быть приведена к более простому виду. Эта операция называется ***приведением подобных членов***.
Умножение одночленов. Произведение нескольких одночленов можно упростить, если только оно содержит степени одних и тех же букв или числовые коэффициенты. В этом случае показатели степеней складываются, а числовые коэффициенты перемножаются.
Деление одночленов. Частное двух одночленов можно упростить, если делимое и делитель имеют некоторые степени одних и тех же букв или числовые коэффициенты. В этом случае показатель степени делителя вычитается из показателя степени делимого, а числовой коэффициент делимого делится на числовой коэффициент делителя.

Многочлен - это алгебраическая сумма одночленов. Степень многочлена есть наибольшая из степеней одночленов, входящих в данный многочлен.
Умножение многочленов. Произведение суммы двух или нескольких одночленов на любое выражение равно сумме произведений каждого из слагаемых на это выражение: $(p+q+r)a = pa+qa+ra$ - раскрытие скобок, причем вместо букв p, q, r, *a* можно взять любое выражение.

Произведение сумм равно сумме всех возможных произведений каждого слагаемого одной суммы на каждое слагаемое другой суммы.

Пример 1. Раскрыть скобки:
$(x+y+z)(a+b) = x(a+b) + y(a+b) + z(a+b) = xa + xb + ya + yb + za + zb$.

Часто бывает полезно преобразовать многочлен так, чтобы он был представлен в виде произведения нескольких сомножителей. Такое тождественное преобразование называется ***разложением многочлена на множители***. В этом случае говорят, что многочлен делится на каждый из этих сомножителей.
При разложении многочленов на множители применяют три основных приёма:

1) вынесение множителя за скобку
2) использование формул сокращённого умножения,
3) способ группировки.

Способ группировки заключается в том, что слагаемые многочлена можно сгруппировать различными способами на основе сочетательного и переместительного законов. На практике он применяется в тех случаях, когда многочлен удается представить в виде пар слагаемых таким образом, чтобы из каждой пары можно было выделить один и тот же множитель. Этот общий множитель можно вынести за скобку и исходный многочлен окажется представленным в виде произведения.

Пример 2. Разложить на множители многочлен $x^3 - 3x^2y - 4xy + 12y^2$.
Решение.
Сгруппируем слагаемые следующим образом:
$x^3 - 3x^2y - 4xy + 12y^2 = (x^3 - 3x^2y) - (4xy - 12y^2)$.
В первой группе вынесем за скобку общий множитель x^2, а во второй − $4y$.
Получаем:
$(x^3 - 3x^2y) - (4xy - 12y^2) = x^2(x - 3y) - 4y(x - 3y)$.
Теперь общий множитель $(x - 3y)$ также можно вынести за скобки:
$x^2(x - 3y) - 4y(x - 3y) = (x - 3y)(x^2 - 4y)$.
Ответ $(x - 3y)(x^2 - 4y)$.

Если соответственные значения двух выражений с одинаковой областью определения, содержащих одни и те же переменные, совпадают при всех допустимых значениях переменных, то выражения называют **тождественно равными.**
Тождеством называют равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

Формулы сокращенного умножения:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2 \qquad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \pm b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b) \qquad a^3 \pm b^3 = (a \pm b) \cdot (a^2 \mp a \cdot b + b^2)$$

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, где x_1 и x_2 корни уравнения $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$.

Формулы корней квадратного уравнения

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, дискриминант $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$		
$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a}$	$x_{1,2} = \frac{-b}{2 \cdot a}$	Среди действительных чисел корней нет

Формулы корней приведенного квадратного уравнения

$x^2 + p \cdot x + q = 0$, дискриминант $D_0 = \frac{p^2}{4} - q$		
$D_0 > 0$	$D_0 = 0$	$D_0 < 0$
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D_0}$	$x_{1,2} = -\frac{p}{2}$	Среди действительных чисел корней нет

Теорема Виета. В приведенном квадратном уравнении $x^2 + p \cdot x + q = 0$ сумма корней равна коэффициенту при x, взятому с противоположным знаком, а их произведение – свободному члену:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Если задано квадратное уравнение в общем виде: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, то делением уравнения на $a \neq 0$ можно свести к приведенному, где $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$.

Следствия теоремы Виета

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

$1)\ a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$

$2)\ a + c = b \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{c}{a}$

Пример 3. Соотнесите каждое выражение

A) $4x^2 – 12xy + 9y^2$ B) $4x^2 – 9y^2$ C) $8x^3 – 27y^3$

с тождественно ему равным:

1) $(2x + 3y)(4x^2 – 6xy + 9y^2)$ 2) $(2x – 3y)(2x + 3y)$

3) $(2x – 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$ 4) $(2x – 3y)^2$

Решение. Это задание проверяет знание формул сокращенного умножения.

$4x^2 – 12xy + 9y^2 = (2x – 3y)^2$, т.е. A – 4

$4x^2 – 9y^2 = (2x – 3y)(2x + 3y)$, т.е. B – 2

$8x^3 – 27y^3 = (2x – 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$ т.е. C – 3

Ответ	A	B	C
	4	2	3

Пример 4 . Разложить на множители квадратный трехчлен $15x^2 – 7x – 8$.

Решение.

Выполняется 1-е следствие теоремы Виета: 15 – 7 – 8 = 0, поэтому $x_1 = 1$; $x_2 = -8/15$.

Используя формулу разложения трехчлена на множители:

$ax^2 + bx + c = a(x – x_1)(x – x_2)$

Получим $15x^2 - 7x - 8 = 15(x-1)\left(x + \frac{8}{15}\right) = (x-1)(15x+8)$

Ответ $(x – 1)(15x + 8)$.

Пример 5 . Разложить на множители квадратный трехчлен $7x^2 + 9x +2$.

Решение.

Выполняется 2-е следствие теоремы Виета: 7 + 2 = 9, поэтому $x_1 = -1$; $x_2 = -2/7$.

Используя формулу разложения трехчлена на множители:

$ax^2 + bx + c = a(x – x_1)(x – x_2)$

Получим $7x^2 + 9x + 2 = 7(x+1)(x + \frac{2}{7}) = (x+1)(7x+2)$

Ответ $(x + 1)(7x + 2)$.

Пример 6. Разложить на множители квадратный трехчлен $5x^2 - 3x - 8$.
Решение.
Выполняется 2-е следствие теоремы Виета: 5 – 8 = -3, поэтому $x_1 = -1$; $x_2 = 8/5$.
Используя формулу разложения трехчлена на множители:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Получим $5x^2 - 3x - 8 = 5(x+1)(x - \frac{8}{5}) = (x+1)(5x-8)$

Ответ (x + 1)(5x – 8).

Пример 7 . Разложить на множители квадратный трехчлен $8x^2 - xy - 7y^2$.
Решение.
Разделим уравнение на y^2, получим $8\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 7 = 0$. Сделаем замену $\frac{x}{y} = t$, получим квадратное уравнение относительно переменной t: $8t^2 - t - 7=0$.
Выполняется 1-е следствие теоремы Виета: 8 – 1 – 7 = 0, поэтому $t_1 = 1$; $t_2 = -7/8$.
Используя формулу разложения трехчлена на множители:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
Получим $8t^2 - t - 7 = 8(t - 1)(t + 7/8) = (t - 1)(8t + 7)$.
Обратная замена и умножение на y^2: $y^2(x/y - 1)(9x/y + 7) = (x - y)(8x + 7y)$.
Ответ (x – y)(8x + 7y).

Пример 8 . Разложить на множители квадратный трехчлен $2x^2 + 5x - 3$.
Решение.
По теореме, обратной к теореме Виета: $x_1x_2 = 2\cdot(-3) = -6$
$x_1 + x_2 = -5$
Подберем корни $ax_1 = -6$; $ax_2 = 1$, тогда $x_1 = -6/2 = -3$; $x_2 = ½$.
Используя формулу разложения трехчлена на множители:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Получим $2x^2 + 5x - 3 = 2(x+3)(x - \frac{1}{2}) = (x+3)(2x-1)$
Ответ (x + 3)(2x – 1).

Пример 9 . Разложить на множители квадратный трехчлен $2x^2 - 3x - 9$.
Решение.
По теореме, обратной к теореме Виета: $x_1x_2 = 2\cdot(-9) = -18$
$x_1 + x_2 = 3$
Подберем корни $ax_1 = 6$; $ax_2 = -3$, тогда $x_1 = 6/2 = 3$; $x_2 = -3/2$.
Используя формулу разложения трехчлена на множители:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Получим $2x^2 - 3x - 9 = 2(x-3)(x + \frac{3}{2}) = (x-3)(2x+3)$
Ответ (x – 3)(2x +3).

Пример 10 . Разложить на множители квадратный трехчлен $6x^2 - 5x + 1$.
Решение.
По теореме, обратной к теореме Виета: $x_1x_2 = 6\cdot1 = 6$
$x_1 + x_2 = 5$
Подберем корни $ax_1 = 2$; $ax_2 = 3$, тогда $x_1 = 2/6 = 1/3$; $x_2 = 3/6 = ½$.
Используя формулу разложения трехчлена на множители:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Получим $6x^2 - 5x + 1 = 6(x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2}) = (3x - 1)(2x - 1)$
Ответ $(3x - 1)(2x - 1)$.

Пример 11 . Разложить на множители квадратный трехчлен $3x^2 - 7x + 2$.
Решение.
По теореме, обратной к теореме Виета: $x_1x_2 = 2\cdot3 = 6$
$x_1 + x_2 = 7$
Подберем корни $ax_1 = 6$; $ax_2 = 1$, тогда $x_1 = 6/3 = 2$; $x_2 = 1/3$.
Используя формулу разложения трехчлена на множители:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Получим $3x^2 - 7x + 2 = 3(x - 2)(x - \frac{1}{3}) = (x - 2)(3x - 1)$
Ответ $(x - 2)(3x - 1)$.

Пример 12 . Разложить на множители квадратный трехчлен $7x^2 + 13xy - 2y^2$.
Решение.
Разделим уравнение на y^2, получим $7\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 13\frac{x}{y} - 2 = 0$. Сделаем замену $\frac{x}{y} = t$, получим квадратное уравнение относительно переменной t: $7t^2 + 13t - 2 = 0$.

По теореме, обратной к теореме Виета: $t_1 t_2 = 7\cdot(-2) = -14$
$t_1 + t_2 = -13$
Подберем корни $at_1 = -14$; $at_2 = 1$, тогда $t_1 = -14/7 = -2$; $t_2 = 1/7$.
Используя формулу разложения трехчлена на множители:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
Получим $7t^2 + 13t - 2 = 7(t + 2)(t - 1/7) = (t + 2)(7t - 1)$.
Обратная замена и умножение на y^2: $y^2(x/y + 2)(7x/y - 1) = (x + 2y)(7x - y)$.
Ответ $(x + 2y)(7x - y)$.

Пример 13. Преобразуйте в многочлен выражение $(x - 7)(x - 5) - x(x - 12)$

1) $x^2 - 12x + 35$ 2) 35 3) $-14x + 35$ 4) $2x^2 - 14x + 35$.
Решение. Раскроем скобки и приведем подобные одночлены:
$(x - 7)(x - 5) - x(x - 12) = x^2 - 7x - 5x + 35 - x^2 + 12x = x^2 - 12x + 35 - x^2 + 12x = 35$.
Ответ 2.

Пример 14. Упростите выражение $(7x-2)^2+4(7x-1)$

1) $49x^2+14x$ 2) $49x^2$ 3) $49x^2+14x-8$ 4) $49x^2-8$.

Решение. Раскроем скобки и приведем подобные одночлены:

$(7x-2)^2+4(7x-1)=49x^2-28x+4+28x-4=49x^2$.

Ответ 2.

Пример 15. Разложить многочлен $5x^2-5y^2-cx+cy$ на множители:

1) $(5-c)(x-y)$ 2) $(x^2-y^2)(5-c)$ 3) $(x+y)(5x-5y-c)$ 4) $(x-y)(5x+5y-c)$

Решение.

$5x^2-5y^2-cx+cy=5(x^2-y^2)-c(x-y)=5(x-y)(x+y)-c(x-y)=(x-y)(5(x+y)-c)$.

Таким образом, $5x^2-5y^2-cx+cy=(x-y)(5x+5y-c)$.

Ответ 4.

Пример 16. Упростите выражение A – B, если $A=(x-2y)(x+2y)$; $B=x^2-4xy+5y^2$.

1) $9y^2+4xy$ 2) $2x^2+4xy-9y^2$ 3) $-5y^2$ 4) $4xy-9y^2$.

Решение.

$A=(x-2y)(x+2y)=x^2-4y^2$, тогда

$A-B=x^2-4y^2-(x^2-4xy+5y^2)=x^2-4y^2-x^2+4xy-5y^2=4xy-9y^2$.

Ответ 4.

Пример 17. Разложить многочлен на множители $a^2-2a^3b-2ab^3+b^2$

Решение: Сгруппируем слагаемые так, чтобы они имели общий множитель, который можно будет затем вынести за скобки, прейдя от суммы к произведению.

1) Объединим крайние слагаемые в одну группу, а средние в другую:

$$a^2-2a^3b-2ab^3+b^2=(a^2+b^2)+(-2a^3b-2ab^3)=(a^2+b^2)-(2a^3b+2ab^3)$$

2) Вынесем за скобки во второй группе общий множитель 2ab, получим:

$$(a^2+b^2)-2ab(a^2+b^2)$$

3) Вынесем за скобки общий множитель первого и второго слагаемого (a^2+b^2):

$$(a^2+b^2)(1-2ab)$$

Полученное выражение есть произведение двух сомножителей, а значит, многочлен разложили на множители.

Ответ $\boldsymbol{a^2-2a^3b-2ab^3+b^2=(a^2+b^2)\cdot(1-2ab)}$

Пример 18. Найти наименьшее значение выражения $5x^2+2y^2-4xy-4x-8y+19$.

Решение.

Представим формулу, задающую функцию, в виде выражения, в которое входят суммы полных квадратов:

$5x^2+2y^2-4xy-4x-8y+19=(4x^2-4xy+y^2)+(x^2-4x+4)+(y^2-8y+16)-1=(2x-y)^2+(x-2)^2+(y-4)^2-1$.

Вспомним, что наименьшее значение квадрата любого выражения равно нулю. Следовательно, наименьшее значение каждого из первых трех слагаемых равно нулю,

причем все они обращаются в 0 при $x = 2$ и $y = 4$. Таким образом, наименьшее значение функции равно -1 и достигается в вершине параболы – точке (2; 4).
Ответ -1.