

Тема №4 «Алгебраические выражения. Область допустимых значений».

Алгебраическим выражением называется совокупность конечного количества чисел, обозначенных буквами или цифрами, соединенных между собой знаками алгебраических действий и знаками последовательности этих действий (скобками).

Алгебраическое выражение, в котором указаны только действия сложения, вычитания, умножения и возведения в степень с натуральным показателем, называют **целым рациональным выражением**. Если в знаменателе выражения есть переменные, то выражение называют **дробно-рациональным**.

Целые и дробно-рациональные выражения вместе называются **рациональными**.

Числовым значением алгебраического выражения при заданных числовых значениях букв называют тот результат, который получится после замены букв их числовыми значениями и выполнения указанных в выражении действий.

Областью допустимых значений (ОДЗ) алгебраического выражения называют множество всех допустимых совокупностей значений букв, входящих в это выражение. Множество всех допустимых значений переменных называют **областью определения** алгебраического выражения.

Пример 1. Найти значение выражения: $1,2 - \frac{5}{6} \cdot a$ при $a = 0,12$.

- 1) 1,1 2) 2 3) -8,8 4) 0

Решение. Подставим в заданное выражение $a = 0,12$.

Получим $1,2 - 5 \cdot 0,12 : 6 = 1,2 - 5 \cdot 0,02 = 1,2 - 0,1 = 1,1$.

Ответ 1.

Пример 2. Из формулы второго закона Ньютона $a = F/m$ выразить силу F .

- 1) $F = a/m$; 2) $F = m/a$ 3) $F = ma$ 4) $F = Fm/a$

Решение. Умножив обе части заданного равенства на m , получим $ma = Fm/m$.

Отсюда $F = ma$

Ответ 3.

Пример 3. Расстояние $S(t)$ в метрах, которое автомобиль проезжает за t секунд, вычисляется по формуле $S(t) = 2t^2 + 5$. За сколько секунд автомобиль проедет 55м?

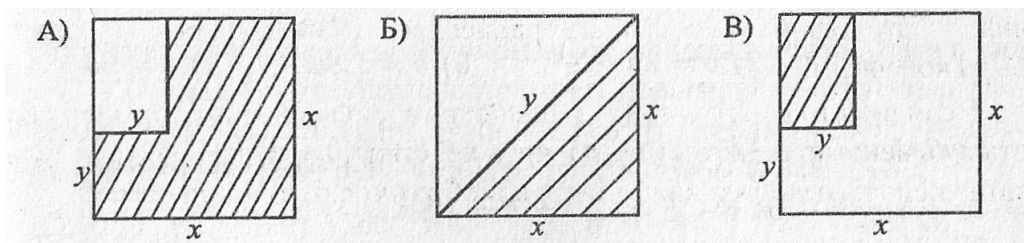
- 1) 25 2) 5 3) 15 4) 10

Решение. Согласно условию, необходимо найти время t , за которое автомобиль пройдет путь $S(t) = 2t^2 + 5 = 55$. Следовательно, $t^2 = 25$.

Отсюда, учитывая, что $t > 0$, находим $t = 5$.

Ответ 2.

Пример 4. Соотнесите площадь заштрихованной фигуры с соответствующей формулой.



1) $x^2/2$

2) $x^2 - xy + y^2$

3) $x^2 + y$

4) $xy - y^2$

Решение. Найдем площадь каждой из фигур. На рисунке А площадь можно найти как разность площади квадрата со стороной x и прямоугольника со сторонами y и $x - y$. Эта площадь $x^2 - y(x - y) = x^2 - xy + y^2$ соответствует формуле 2).

Площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке Б, можно найти как половину площади квадрата со стороной x . Эта площадь $x^2/2$ соответствует формуле 1).

На рисунке В площадь найдем как площадь прямоугольника со сторонами y и $x - y$. Эта площадь $y(x - y) = xy - y^2$ соответствует формуле 4).

Ответ А Б В

2 1 4

Пример 5. Площадь правильного треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где S – площадь треугольника, a – сторона треугольника. Во сколько раз площадь правильного треугольника будет больше при $a = 6$, чем при $a = 3$?

- 1) 9 2) 2 3) 3 4) 4

Решение. Пусть S_1 – площадь треугольника со стороной $a_1 = 6$, S_2 – площадь треугольника со стороной $a_2 = 3$. Тогда найдем отношение $S_1 \div S_2 = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \div \frac{3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2}{3^2} = 4$.

Ответ 4.

Пример 6. Из равенства $a + \frac{1}{3}b = 2(b - a)$ выразить b .

- 1) $b = 3a$ 2) $b = 2a - 1/3$ 3) $b = 1,8a$ 4) $b = 9a$

Решение. $a + \frac{1}{3}b = 2(b - a) | \times 3 \Leftrightarrow 3a + b = 6(b - a) \Leftrightarrow 3a + b = 6b - 6a \Leftrightarrow 5b = 9a \Leftrightarrow b = 1,8a$

Ответ 3.

Пример 7. Турист прошел 2 км пешком и проехал на автобусе t часов со скоростью 50 км/ч. Какой путь проделал турист?

- 1) $S = 2t + 50$ 2) $S = 2 + 50t$ 3) $S = 2 + t/50$ 4) $S = (t + 2) \cdot 50$

Решение. Общий путь S , который преодолел турист, складывается из пути, который он проделал пешком – 2 км, и пути, который он проехал на автобусе – $50t$. Следовательно, $S = 2 + 50t$.

Ответ 2.

Пример 8. У Оли x открыток, у Тани y открыток, у Кати z открыток. Когда Оля и Катя сложили свои открытки вместе, оказалось, что их в 2 раза больше, чем у Тани. Какое из буквенных выражений, представленных ниже, соответствует описанному условию?

- 1) $x - y = 2z$ 2) $x + z = 2y$ 3) $2x - y = z$ 4) $2z - x = y$

Решение. Согласно условию задачи, у Оли и Кати всего $x + z$ открыток, что в 2 раза больше y – числа открыток Тани. То есть $x + z = 2y$.

Ответ 2.

Пример 9. Турист прошел из точки М А км, а потом прошел В км в обратном направлении, после чего в первоначальном направлении он прошел расстояние в 1,5 раза большее, чем весь пройденный до этого путь, и остановился в точке К. Выберите верное равенство.

- 1) $MK = A - B + 1,5(A - B)$
- 2) $MK = A - B + 1,5(A + B)$
- 3) $MK = A + B + 1,5(A - B)$
- 4) $MK = A - B - 1,5A + B$

Решение. Нарисуем схему задачи:



Сначала турист прошел расстояние $MH = A$ км, затем вернулся в точку Т, пройдя $HT = B$ км. Заметим, что $MT = A - B$ км. После этого турист прошел расстояние в 1,5 раза большее, чем весь путь $(A + B)$ км. Таким образом, $MK = A - B + 1,5(A + B)$, что соответствует второму варианту ответов.

Ответ 2.

Пример 10. А и В – цифры от 0 до 9, причем $B > A$. Выразите М через А и В, если М – трехзначное число, цифры которого в порядке убывания разрядов равны А, В и $B - A$ соответственно. Какое из буквенных выражений, представленных ниже, соответствует условию задачи?

- 1) $M = 100A + 10B + (B - A)$
- 2) $M = 100B + 10A + (B - A)$
- 3) $M = 100(B - A) + 10A + B$
- 4) $M = 100(B - A) + 10B + A$

Решение. По условию в порядке убывания разрядов цифры числа М имеют следующий вид: на первом месте А, на втором – В, на третьем – $B - A$. Тогда трехзначное число запишем так $M = 100A + 10B + (B - A)$, что соответствует первому варианту.

Ответ 1.

Пример 11. Даны выражения: А) $\frac{6}{b-6}$; Б) $\frac{5b+1}{6+b}$; В) $\frac{b}{6+b} + \frac{5}{6}$;

Какие из выражений не имеют смысла при $b = -6$?

- 1) А; В
- 2) только Б
- 3) Б; В
- 4) только В

Решение. Каждое из предложенных выражений **не имеет** смысла в случае, когда знаменатель дроби, входящей в выражение, обращается в ноль. При $b = -6$ в ноль обращается знаменатель в выражениях Б и В. Следовательно, из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

Пример 12. Из выражений: а) $\frac{n+\frac{1}{n}}{2}$; б) $\frac{n}{2} + n$; в) $\frac{2n}{n+2}$; д) $\frac{n}{1+\frac{1}{n^2}}$ выберите те, которые имеют смысл при любом значении n.

- 1) б
- 2) а; б
- 3) б; д
- 4) б; в

Решение. Выражение а) не имеет смысла при $n = 0$; выражение б) имеет смысл при любых значениях n ; выражение с) не имеет смысла при $n = -2$; выражение д) не имеет смысла при $n = 0$. Следовательно, из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

Пример 13. Укажите все значения c , при которых выражение $\frac{c+3}{c(c-1)}$ не имеет смысла.

- 1) 3 2) 0; 3 3) 1 4) 0; 1

Решение.

Заданное выражение не имеет смысла, когда $c(c - 1) = 0$, то есть $c = 0$ или $c = 1$. Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

Пример 14. Какая пара чисел является **недопустимой** для дроби $\frac{x^2-4xy+y^3}{2x-y}$?

- 1) $(-2; 1)$ 2) $(2; -1)$ 3) $(-1/2; 1)$ 4) $(1/2; 1)$

Решение. Для данной дроби недопустимыми являются числа, при которых знаменатель дроби обращается в 0. Подставляя в выражение $2x - y$ соответствующие значения из предложенных пар чисел, получаем, что только при $x = 1/2$ и $y = 1$ выражение не имеет смысла. Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

Пример 15. При каких значениях x дробь $\frac{5x}{x^2-36}$ не имеет смысла?

Решение. Дробь не имеет смысла, когда её знаменатель равен нулю. Следовательно, заданное выражение не имеет смысла при $x = -6$ и $x = 6$.

Ответ: -6; 6.

Пример 16. Найдите все допустимые значения y для дроби $\frac{y(y+1)}{3(y-2)(y^2+9)}$.

- 1) $y \neq 2$ 2) $y \neq \pm 3$ 3) $y = 2; y \neq -1$ 4) $y \neq 0; y \neq -1$

Решение. Допустимыми значениями y является всё множество \mathbb{R} за исключением тех значений y , при которых знаменатель дроби обращается в 0. Из уравнения $3(y-2)(y^2+9)$ находим $y = 2$. Следовательно, данное выражение имеет смысл при $y \neq 2$. Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

Пример 17. Найдите числа, при которых знаменатель дроби $\frac{2x}{x^2+6x+9}$ равен 0.

- 1) 0 2) -3 3) 3 4) таких чисел нет

Решение. Решим уравнение $x^2 + 6x + 9 = 0$; $(x + 3)^2 = 0$; $x = -3$. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

Пример 18. Соотнесите каждое выражение

А) $\frac{1}{x^2-8x}$; Б) $\frac{4}{x^2+9}$; В) $\frac{2x}{4x-8}$ с областью его определения.

- 1) $x \neq 2$ 2) любое число 3) $x \neq 8, x \neq 0$ 4) $x \neq 0, x \neq 2$

Решение. Областью определения выражения А) является множество \mathbb{R} за исключением значений x , при которых $x^2 - 8x = 0$. Следовательно, выражение определено при $x \neq 8$ и $x \neq 0$, что соответствует ответу 3).

Областью определения выражения Б) является всё множество \mathbb{R} (знаменатель данного выражения всегда положителен), что соответствует ответу 2).

Областью определения выражения В) является множество \mathbb{R} за исключением значений x , при которых знаменатель $4x - 8 = 0$. Следовательно, выражение определено при $x \neq 2$, что соответствует ответу 1).

Ответ: А Б В
 3 2 1

Пример 19. Из равенства $1,5k + 7n = \frac{4}{mn^2}$ выразить m .

$$1) m = \frac{n^2}{4(1,5k + 7n)}$$

$$2) m = \frac{1,5k + 7n}{4n^2}$$

$$3) m = \frac{4n^2}{1,5k + 7n}$$

$$4) m = \frac{4}{n^2(1,5k + 7n)}$$

Решение.

$$mn^2 = \frac{4}{1,5k + 7n}$$

$$m = \frac{4}{1,5k + 7n} \div n^2$$

$$m = \frac{4}{n^2(1,5k + 7n)}$$

Итак, верный ответ 4).

Ответ 4.