Тема №3. «Отношения. Пропорции. Проценты»

Отношение двух чисел — это частное от деления одного из них на другое. Отношение показывает, во сколько раз первое число больше второго или какую часть первое число составляет от второго.
Если значения двух величин выражены разными единицами измерения, то для нахождения отношения этих величин надо предварительно перейти к одной единице измерения.

Взаимно обратными называют числа, произведение которых равно 1 $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1\right)$,

где $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Обратное отношение — это отношение, взятое в обратном порядке по отношению к данному. Отношение b/a называют обратным отношению a/b.

Пропорция — это равенство двух отношений.

В пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (или $a : b = c : d$) числа a и d называют **крайними**, а числа b и c — **средними** членами пропорции.

Основное свойство пропорции. В верной пропорции произведение крайних членов равно произведению её средних членов. Если для двух отношений $a : b$ и $c : d$ выполняется равенство $ad = bc$, то $a : b = c : d$ — верная пропорция.
Если в верной пропорции поменять местами средние члены или крайние члены, то получившиеся новые пропорции верны.

Перестановка членов пропорции:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$; $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$.

Производные пропорции.

Дана пропорция $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, справедливы следующие пропорции:

$\frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c}$; $\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Нахождение части от числа.

Пример 1. Найти часть 5/16 от числа 800.
Решение. Если вы забыли, какое действие надо сделать, существует такой прием. Разберемся с «половиной», т.е. ½ числа, на примере, который составим сами. Например, ½ от 800 мы понимаем, что это 400.
800 ? ½ = 400. Какое действие мы сделали? Нетрудно догадаться, что это умножение.
Тогда легко найдем 5/16 от 800 как $800 \cdot 5/16 = 250$.
Ответ 250.

Нахождение числа по его части.

Пример 2. Найти все число, если его 7/15 равны 210.
Решение. Выясним с помощью «половины», т.е. ½ числа, какое действие мы должны сделать. Пусть, например, надо найти число, если его половина равна 300. Очевидно, что это число 600. Какое действие мы сделали?
300 ? ½ = 600. Можно догадаться, что это деление. Тогда легко найдем чему равно все число, если его 7/15 равны 210:

210 : 7/15 = 210 ·15 : 7 = 450.
Ответ 450.

Пример 3. Отношение с к d равно 7/9. Найдите их обратное отношение.

1) –7/9 2) $1\,^{2}/_{7}$ 3) 0,8 4) 1,4

Решение. Отношением, обратным к 7/9, является 9/7 = $1\,^{2}/_{7}$. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

Пример 4. Масса печенья 15 кг, а масса упаковки 600 г. Найдите отношение массы печенья к массе упаковки.

1) 15/600 2)5/6 3)1/25 4)25

Решение. 600 г = 0,6 кг. Отношение массы печенья к массе упаковки равно 15/0,6 = 150/6 = 25. Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

Пример 5. Из каких отношений А = 4,8 : 0,9; Б = 1,6 : 0,3; В = 0,48 : 0,9; Г = 25 : 12 можно составить пропорцию?

1) А и Б 2) Б и В 3) А и В 4) Б и Г

Решение. Проверим предложенные отношения на выполнение основного свойства пропорции.

1) Для отношений А и Б произведение крайних членов 4,8·0,3 = 1,44; произведение средних членов 0,9 · 1,6 = 1,44; 1,44 = 1,44. Следовательно, из этих отношений можно составить пропорцию.

2) Для отношений Б и В произведение крайних членов 1,6·0,9 = 1,44; произведение средних членов 0,3 · 0,48 = 0,144; 1,44 $\neq$ 0,144. Следовательно, из этих отношений нельзя составить пропорцию.

3) Для отношений А и В произведение крайних членов 4,8·0,9 = 4,32; произведение средних членов 0,9 · 0,48 = 0,432; 4,32 $\neq$ 0,432. Следовательно, из этих отношений нельзя составить пропорцию.

4) Для отношений Б и Г произведение крайних членов 1,6· 12 = 19,2, произведение средних членов 0,3· 25 = 7,5; 19,2 $\neq$ 7,5. Следовательно, из этих отношений нельзя составить пропорцию.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

Пример 6. Из пропорции 20 : 15 = 16 : 12 составлены 4 равенства, укажите верное.

1) 15 : 20 = 16 : 12
2) 20 : 12 = 15 : 16
3) 12 : 16= 15 : 20
4) 20 : 16 = 12 : 15

Решение. Заданная пропорция останется верной, если в ней поменять местами средние или крайние члены. Следовательно, из предложенных пропорций верной является только 3).

Ответ: 3.

Пример 7. Какое из перечисленных ниже равенств отношений составлено неверно, если 13 · 6 = 0,78 · 100?

1) 13 : 6 = 0,78 : 100

2) 13 : 100 = 0,78 : 6
3) 6 : 100 = 0,78 : 13
4) 13 : 0,78 = 100 : 6

Решение. Из заданного равенства произведений, на основе перестановки сомножителей и основного свойства пропорции, можно составить четыре верные пропорции:

13 : 0,78 = 100 : 6;
6 : 0,78 = 100 : 13;
13 : 100 = 0,78 : 6;
6 : 100 = 0,78 : 13.

Следовательно, из предложенных ответов неверным равенством является 1).

Ответ: 1.

Пример 8. На пошив 9 рубашек ушло 18,9 м ткани. Сколько метров такой же ткани потребуется на пошив 15 рубашек?

1) 27 2) 35 3) 31,5 4) 30

Решение. Пусть на пошив 15 рубашек требуется x м ткани. Тогда, согласно условию,

9 рубашек — 18,9 м;
15 рубашек — x м

Так как расход ткани прямо пропорционален количеству рубашек, то справедливо равенство $\frac{9}{15}=\frac{18,9}{x}$. По правилу нахождения крайнего члена пропорции x = 15 ·18,9 : 9 = 31,5. Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

Пример 9. С помощью 6 одинаковых труб бассейн заполняется водой за 32 минуты. За сколько минут можно заполнить бассейн с помощью 8 таких труб?

1) 36 2) 42 3) 64 4) 24

Решение. Пусть с помощью 8 труб бассейн можно заполнить за x минут. Тогда

6 труб — 32 мин;
8 труб — x мин.

Так как время заполнения бассейна обратно пропорционально количеству труб, то справедливо равенство 6 : 8 = x : 32. По правилу нахождения среднего члена пропорции x = 6 ·32 : 8 = 24. Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

Пример 10. Угол в 140° разделен на 4 части, градусные меры которых относятся как 2:3:4:5. Найдите градусную меру меньшего из полученных углов.

1) 10° 2) 20° 3) 70° 4) 120°

Решение. Пусть x — градусная мера одной части. Тогда градусные меры углов соответственно равны 2x, 3x, 4x и 5x. Следовательно, 2x + 3x + 4x + 5x = 140; 14x = 140; x = 10; 10° — приходится на одну часть. Градусная мера меньшего из полученных углов равна 2·10° = 20°. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

Пример 11. Для строительства стадиона 5 бульдозеров расчистили площадку за 2 часа 20 минут. За какое время 7 таких бульдозеров расчистят эту площадку?

1) $^{7}/_{5}$ ч 2) 3 ч 60 мин 3) 1ч 40 мин 4) 3 ч 16 мин

Решение. Составим пропорцию, учитывая, что у нас обратная пропорциональность, так как чем больше бульдозеров задействовано, тем меньше время.

5 бульдозеров – 7/3 часа
7 бульдозеров – x часов.
$\frac{5}{7}=\frac{x}{\frac{7}{3}};\ x=\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{3}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}=1ч\ 40мин$, что соответствует третьему варианту.
Ответ 3.
Пример 12. Кочан капусты на $^4/_5$ кг тяжелее $^4/_5$ этого же кочана. Какова масса кочана капусты (в кг)?

1) 5 2) 4,5 3) 3 4) 4

Решение. Пусть кочан капусты весит x кг. Тогда по условию задачи $^4/_5$ x + $^4/_5$ = x. Откуда находим $^1/_5$ x =$^4/_5$; x = 4 кг, что соответствует четвертому варианту.
Ответ 4.
Пример 13. Три числа относятся как 8/19 : 0,6 : 93/95. Третье число больше половины первого на 36,5. Найти большее из чисел.
Решение: Пусть первое число 8X/19; второе – 0,6X; третье – 93X/95.
По условию 3-е больше ½ первого на 36,5:
93/95 X- 1/2·8/19 X=36,5; X(93/95-4/19)=73/2; 73/95 X= 73/2; X = 46,5. Тогда
первое число (8/19) ·46,5 = 20
второе число 0,6 ·46,5 = 28,5
третье число (93/95) ·46,5 = 41,5 – наибольшее из чисел.
Ответ 41,5.

Проценты

1% — это сотая (1/100) часть от целого.
Чтобы найти процент от числа, нужно число процентов представить в виде десятичной дроби и данное число умножить на эту десятичную дробь.
Найти процент от числа сводится к задаче нахождения части от числа.
Найти число по его проценту сводится к задаче нахождения числа по его части.

Нахождение процента от числа.

Процент – это сотая часть числа. Значит, задача сводится к нахождению части числа.
Например, 3% = 0,03; 0,15% = 0,0015; 29,34% =0,2934.
А) 6% от 20 – это 0,06 от 20, т.е. 0,06 · 20 = 1,2.
Б) 6% от X – это 0,06X.
Пример 14. По плану суточная добыча угля должна быть 2860 тонн. Фактически шахта выполнила 115% плана. Сколько это составляет тонн?
Решение. 2860 ·115 : 100 = 3289 (т)
Ответ 3289.

Нахождение числа по его проценту.

Пример 15. 15% составляют 30. Чему равно все число? Задача сводится к нахождению числа по его части: 30 : 0,15 = 30 · 100 : 15 = 200.
2-й способ (пропорция): 15% - 30 X = 100 · 30 : 15 =200.
100% - X
Ответ 200.

Выразить одно число в процентах от другого

Пример 16. Сколько процентов составляет число А от числа В?
Решение: $A : B \cdot 100$ (%)
Например, число 20 от 80 составляет $20:80\cdot100 = 25\%$

Пример 16. Число Х увеличить на а)3%, б) 17%, в) 32%
Решение: а) $X + 0{,}03X = 1{,}03X$;
б) $X + 0{,}17X = 1{,}17X$;
в) $X + 0{,}32X = 1{,}32X$.

Пример 17. Число Х уменьшить на а)3%, б) 17%, в) 32%
Решение: а) $X - 0{,}03X = 0{,}97X$;
б) $X - 0{,}17X =0{,}83X$;
в) $X - 0{,}32X = 0{,}68X$.

Пример 18. А дороже В на 25%. На сколько процентов В дешевле А?
Решение: Те, кто решил, что ответ 25% - ошиблись.
А больше В на 25%, т.е. $A = 1{,}25B$. Отсюда $B = A : 1{,}25 = 0{,}8\ A$.
Запись $B = 0{,}8A$ означает, что В дешевле А на 20%.
Ответ 20%.

Пример 19. Метод скоростного обжига кирпича позволяет увеличить выпуск кирпича с 1200 до 2300 штук. На сколько процентов при этом увеличилось производство кирпича (ответ округлить до целых)?
Решение.
1-й способ: $2300 : 1200 \cdot 100 =192\%$; $192 - 100 = 92\%$.
2-й способ: $2300 - 1200 = 1100$; $1100 : 1200 \cdot 100 = 92\%$.
Ответ 92.

Пример 20. Сколько стоил метр ткани до снижения цен, если после понижения продажной цены на 15%, эта ткань продается по 1200 рублей за метр.
НЕВЕРНОЕ решение:
1) 15% от 1200 это $1200\cdot0{,}15 = 180$ (руб.)
2) $1200 + 180 = 1380$ (руб.) – стоил метр ткани до снижения цен.
Это НЕВЕРНО, т.к. процент снижения устанавливается по отношению к прежним ценам.
ПРАВИЛЬНОЕ решение:
После снижения цен стоимость ткани составила $100 - 15 = 85\%$ от прежней цены. Поэтому прежняя цена составляла (см. пример 15) $1200 : 0{,}85 = 1411$ руб. 76 коп. или 1411,76 руб.
Ответ 1411,76.