Тема № 65 «Сфера и шар»

Тело, полученное в результате вращения полукруга вокруг диаметра, называется *шаром*. Поверхность, образуемая при этом, называется *сферой*.

Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного, от данной точки.

Эта точка называется центром шара, а данное расстояние называется радиусом шара.

Граница шара называется *шаровой поверхностью* или *сферой*.

Любой отрезок, соединяющий центр шара с точкой шаровой поверхности, называется *радиусом*.

Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется *диаметром*.

Концы любого диаметра называются *диаметрально-противоположными точками шара*.

Всякое *сечение шара* плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра на секущую плоскость.

Плоскость, проходящая через центр шара, называется *диаметральной плоскостью*. Сечение шара диаметральной плоскостью называется большим кругом, а сечение сферы – большой окружностью.

Любая диаметральная плоскость шара являются его плоскостью симметрии. Центр шара является его центром симметрии

Плоскость, проходящая через точку шаровой поверхности и перпендикулярная радиусу, проведенного в эту точку, называется *касательной плоскостью*. Данная точка называется точкой касания.

Касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку – точку касания.

Прямая, проходящая через заданную точку шаровой поверхности перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку, называется *касательной*.

Через любую точку шаровой поверхности проходит бесконечно много касательных, причем все они лежат в касательной плоскости шара.

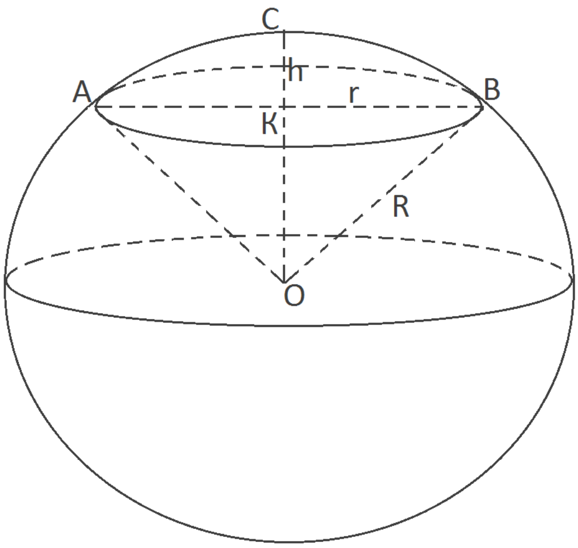
Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью.

Шаровым слоем называется часть шара, расположенная между двумя параллельными плоскостями, пересекающими шар.

Шаровой сектор получается из шарового сегмента и конуса.

Если шаровой сегмент меньше полушара, то шаровой сегмент дополняется конусом, у которого вершина в центре шара, а основанием является основание сегмента.

Если же сегмент больше полушара, то указанный конус из него удаляется.



Основные формулы

Шар (R = OB – радиус):
$S_б = 4\pi R^2$; $V = 4\pi R^3/3$.

Шаровой сегмент (R = OB – радиус шара, h = CK **–** высота сегмента, r = KB – радиус основания сегмента):

$V_{сегм} = \pi h^2(R - h/3)$

или $V_{сегм} = \pi h(h^2 + 3r^2)/6$;

$S_{сегм} = 2\pi Rh$.

Шаровой сектор (R = OB – радиус шара, h = CK – высота сегмента):
$V = V_{сегм} \pm V_{кон}$, «+» – если сегмент меньше,
«–» – если сегмент больше полусферы.

$$V = \frac{2}{3}\pi \cdot R^2 h$$

или $V = V_{сегм} + V_{кон} = \pi h^2(R - h/3) + \pi r^2(R - h)/3$.

Шаровой слой (R_1 и R_2 – радиусы оснований шарового слоя; h = CK – высота шарового слоя или расстояние между основаниями):
$V_{ш/сл} = \pi h^3/6 + \pi h(R_1^2 + R_2^2)/2$;
$S_{ш/сл} = 2\pi Rh$.

Пример 1. Объем шара равен 288п см^3. Найти диаметр шара.

Решение: $V = \pi d^3 / 6$

$288\pi = \pi d^3 / 6$

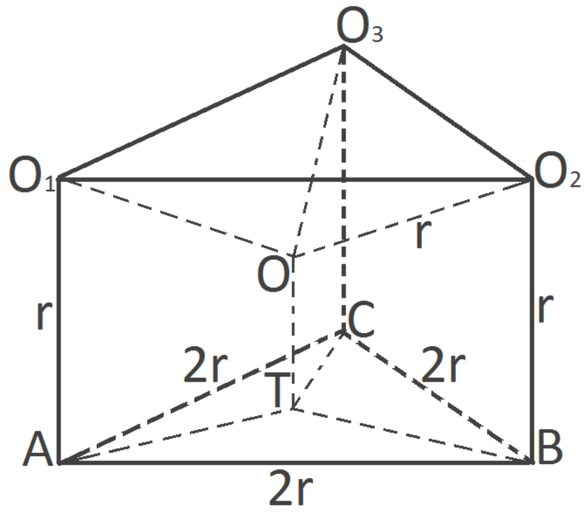
$\pi d^3 = 1728\pi$

$d^3 = 1728$

d = 12 см.

Ответ 12.

Пример 2. Три равных сферы радиусом r касаются друг друга и некоторой плоскости. Определить радиус четвертой сферы, касающейся трех данных и данной плоскости.



Решение: Пусть O_1, O_2 , O_3 – центры данных сфер и O – центр четвертой сферы, касающейся трех данных и данной плоскости. Пусть A, B, C, T – точки касания сфер с данной плоскостью. Точки касания двух сфер лежат на линии центров этих сфер, поэтому $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1 = 2r$. Точки равноудалены от плоскости ABC, поэтому ABO_2O_1, ABO_2O_3, ABO_3O_1 – равные прямоугольники, следовательно, ΔABC – равносторонний со стороной 2r.

Пусть x – искомый радиус четвертой сферы. Тогда OT = x. Следовательно,

$AT = 2\sqrt{(rx)}$. Аналогично $BT = CT = 2\sqrt{(rx)}$. Значит, T – центр равностороннего треугольника. Поэтому $AT\sqrt{3} = AB$. Отсюда

$2\sqrt{(rx)}\cdot\sqrt{3} = 2r \Leftrightarrow 3xr = r^2 \Leftrightarrow x = r/3$.

Ответ r/3.

Сфера, вписанная в пирамиду

В каждую правильную пирамиду можно вписать сферу. Центр сферы лежит на высоте пирамиды в точке ее пересечения с биссектрисой линейного угла при ребре основания пирамиды.

Замечание. Если в пирамиду, необязательно правильную, можно вписать сферу, то радиус r этой сферы можно вычислить по формуле $r = 3V/S_{пп}$,

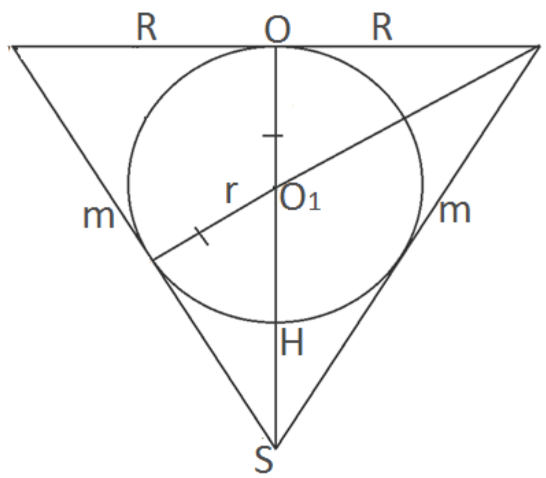
где V – объем пирамиды, $S_{пп}$ – площадь ее полной поверхности.

Пример 3. Коническая воронка, радиус основания которой R, а высота H, наполнена водой. В воронку опущен тяжелый шар. Каким должен быть радиус шара, чтобы объем воды, вытесненный из воронки погруженной частью шара, был максимальным?

Решение: Проведем сечение через центр конуса. Данное сечение образует равнобедренный треугольник.

Если в воронке находится шар, то максимальный размер его радиуса будет равен радиусу вписанной в получившийся равнобедренный треугольник окружности.

Радиус вписанной в треугольник окружности равен:
$r = S / p$, где S - площадь треугольника, p - его полупериметр.
Площадь равнобедренного треугольника равна половине высоты ($H = SO$), умноженной на основание. Но, поскольку, основание - удвоенный радиус конуса, то $S = RH$.
Полупериметр равен $p = 1/2 (2R + 2m) = R + m$.
m - длина каждой из равных сторон равнобедренного треугольника,
R - радиус окружности, составляющей основание конуса.



m найдем по теореме Пифагора как $m = \sqrt{H^2 + R^2}$, откуда
$p = 1/2 (2R + 2\sqrt{H^2 + R^2}) = R + \sqrt{H^2 + R^2}$
Кратко это выглядит следующим образом:

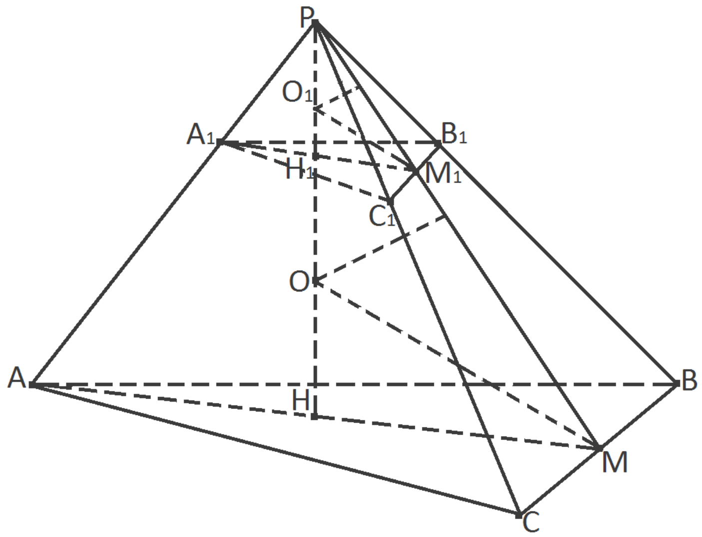
$$r = \frac{S}{p} = \frac{RH}{p}$$

$$r = \frac{RH}{\frac{1}{2}\left(2R + 2\sqrt{H^2 + R^2}\right)}$$

$$r = \frac{RH}{R + \sqrt{H^2 + R^2}}$$

Ответ $RH/(R + \sqrt{H^2 + R^2})$.

Пример 4. В правильной треугольной пирамиде с двугранным углом при основании, равным α, расположены два шара. Первый шар касается всех граней пирамиды, а второй шар касается всех боковых граней пирамиды и первого шара. Найти отношение радиуса первого шара к радиусу второго шара, если $\mathrm{tg}\alpha = 24/7$.



Решение: Пусть PABC – правильная пирамида и точка H – центр ее основания ABC. Пусть M – середина ребра BC. Тогда $\angle$PMA – линейный угол двугранного угла $\angle$(A, BC, P), который по условию равен α, причем $\alpha < 90º$. Центр первого шара, касающегося всех граней пирамиды, лежит на отрезке PH в точке его пересечения с биссектрисой $\angle$PMA.

Пусть HH_1 – диаметр первого шара и плоскость , проходящая через точку H_1 перпендикулярно прямой PH, пересекает боковые ребра PA, PB, PC соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Тогда H_1 будет центром правильного $\Delta A_1B_1C_1$, а пирамида $PA_1B_1C_1$ будет подобна пирамиде PABC с коэффициентом подобия $k = PH_1/PH$. Заметим, что второй шар, с центром в точке O_1, является вписанным в пирамиду $PA_1B_1C_1$ и поэтому отношение радиусов вписанных шаров равно коэффициенту подобия: $OH/OH_1 = PH/PH_1$. Из равенства $\mathrm{tg}\alpha = 24/7$ находим $\cos\alpha = 1/\sqrt{(1 + \mathrm{tg}^2\alpha)} = 7/25$,

$\mathrm{tg}(\alpha/2) = \sqrt{[(1 - \cos\alpha)/(1 + \cos\alpha)]} = ¾$.

Пусть AB = x. Тогда $HM = x\sqrt{3}/6$,

$OH = HM\ \mathrm{tg}(\alpha/2) = x\sqrt{3}\mathrm{tg}(\alpha/2)/6 = x\sqrt{3}/8$,

$PH = HM\ \mathrm{tg}\alpha = 4x\sqrt{3}/7$, $PH_1 = PH - 2OH = 9x\sqrt{3}/28$.

Отсюда искомое отношение $OH/O_1H_1 = 16/9$.

Ответ 16/9.

Сфера, вписанная в призму

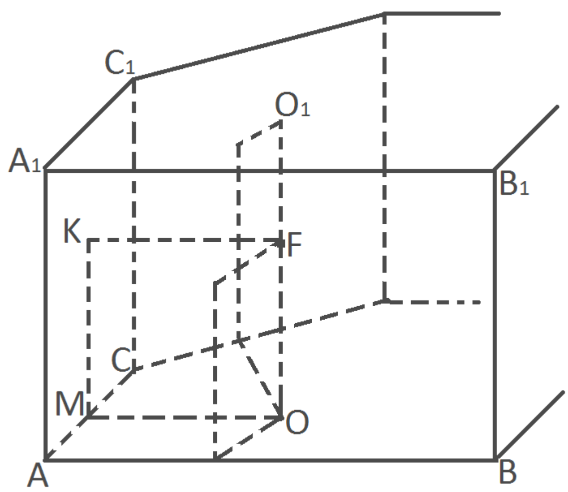
Диаметр D сферы, вписанной в призму, равен высоте H призмы: D = 2R =H.

Радиус R сферы, вписанной в призму, равен радиусу окружности, вписанной в перпендикулярное сечение призмы.

Если в прямую призму вписана сфера, то в основание этой призмы можно вписать окружность.

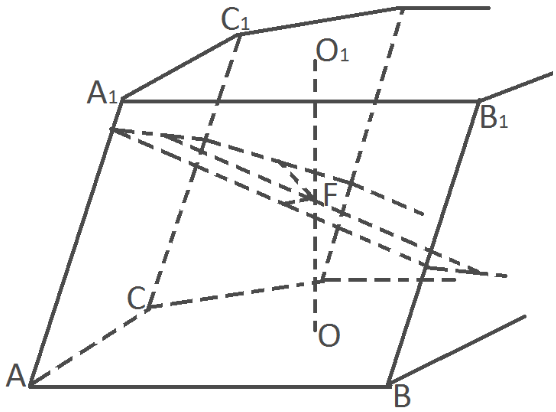
Радиус R сферы, вписанной в прямую призму, равен радиусу окружности, вписанной в основание призмы.

Теорема 1. Пусть в основание ***прямой призмы*** можно вписать окружность, и высота H призмы равна диаметру D этой окружности. Тогда в эту призму можно вписать сферу диаметром D. Центр этой вписанной сферы совпадает с серединой отрезка, соединяющего центры окружностей, вписанных в основания призмы.



Доказательство: Пусть $ABC\ldots A_1B_1C_1\ldots$– прямая призма и O – центр окружности, вписанной в ее основание ABC. Тогда точка O равноудалена от всех сторон основания ABC. Пусть O_1 – ортогональная проекция точки O на основание $A_1B_1C_1$. Тогда O_1 равноудалена от всех сторон основания $A_1B_1C_1$, и $OO_1 \,||\, AA_1$. Отсюда следует, что прямая OO_1 параллельна каждой плоскости боковой грани призмы, а длина отрезка OO_1 равна высоте призмы и, по условию, диаметру окружности, вписанной в основание призмы. Значит, точки отрезка OO_1 равноудалены от боковых граней призмы, а середина F отрезка OO_1, равноудаленная от плоскостей оснований призмы, будет равноудалена от всех граней призмы. То есть F – центр сферы, вписанной в призму, и диаметр этой сферы равен диаметру окружности, вписанной в основание призмы. Теорема доказана.

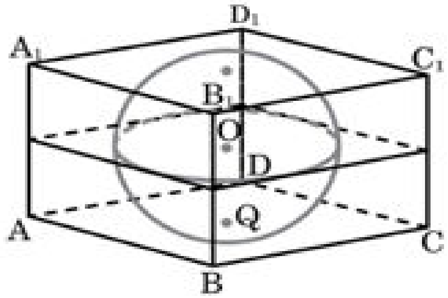
Теорема 2. Пусть в перпендикулярное сечение наклонной призмы можно вписать окружность, и высота призмы равна диаметру этой окружности. Тогда в эту наклонную призму можно вписать сферу. Центр этой сферы делит высоту, проходящую через центр окружности, вписанной в перпендикулярное сечение, пополам.



Доказательство: Пусть $ABC\ldots A_1B_1C_1\ldots$– наклонная призма и F – центр окружности радиусом FK, вписанной в ее перпендикулярное сечение. Поскольку перпендикулярное сечение призмы перпендикулярно каждой плоскости ее боковой грани, то радиусы окружности, вписанной в перпендикулярное сечение, проведенные к сторонам этого сечения, являются перпендикулярами к боковым граням призмы. Следовательно, точка F равноудалена от всех боковых граней.

Проведем через точку F прямую OO_1, перпендикулярную плоскости оснований призмы, пересекающую эти основания в точках O и O_1. Тогда OO_1 – высота призмы. Поскольку по условию $OO_1 = 2FK$, то F – середина отрезка OO_1:

$FK = OO_1/2 = FO = FO_1$, т.е. точка F равноудалена от плоскостей всех без исключения граней призмы. Значит, в данную призму можно вписать сферу, центр которой совпадает с точкой F – центром окружности, вписанной в то перпендикулярное сечение призмы, которое делит высоту призмы, проходящую через точку F, пополам. Теорема доказана.

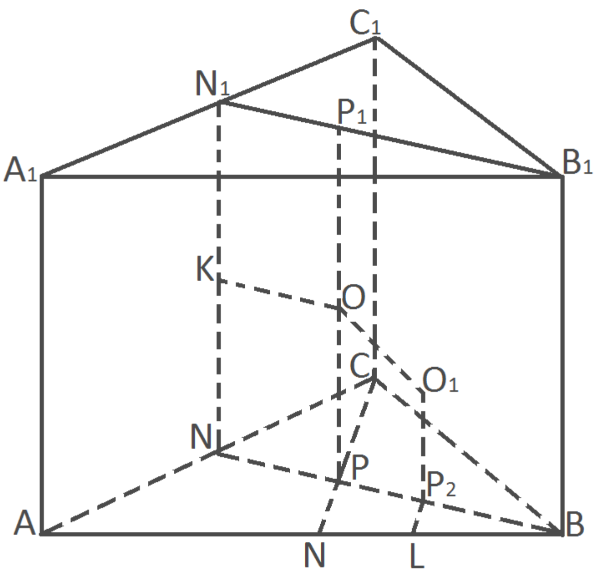


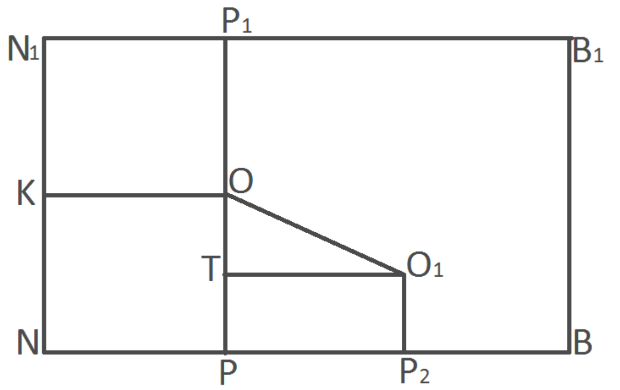
Пример 5. В прямоугольный параллелепипед вписан шар радиуса 1. Найдите объем параллелепипеда.

Решение: Нарисуйте вид сверху. Или сбоку. Или спереди. Вы увидите одно и то же — круг, вписанный в прямоугольник. Очевидно, этот прямоугольник будет квадратом, а па-

раллелепипед будет кубом. Длина, ширина и высота этого куба в два раза больше, чем радиус шара.
AB=2, а следовательно объем куба равен 8.
Ответ 8.

Пример 6. В правильной треугольной призме со стороной основания, равной $4\sqrt{3}$, расположены два шара. Первый шар вписан в призму, а второй шар касается одного основания призмы, двух ее боковых граней и первого шара. Найти радиус второго шара.





Решение: Пусть $ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма и точки P и P_1 – центры ее оснований. Тогда центр шара O, вписанного в эту призму, является серединой отрезка PP_1. Рассмотрим плоскость PBB_1. Поскольку призма правильная, то PB лежит на отрезке BN, который является биссектрисой и высотой ΔABC. Следовательно, плоскость $PBB_1 \perp ACC_1$ и является биссекторной плоскостью двугранного угла при боковом ребре BB_1. Поэтому любая точка этой плоскости равноудалена от боковых граней AA_1BB_1 и CC_1B_1B. В частности, перпендикуляр OK, опущенный из точки O на грань ACC_1A_1, лежит в плоскости PBB_1 и равен отрезку OP.

Заметим, что KNPO – квадрат, сторона которого равна радиусу шара, вписанного в данную призму.

Пусть O_1 – центр шара, касающегося вписанного шара с центром O и боковых граней AA_1BB_1 и CC_1B_1B призмы. Тогда точка O_1 лежит плоскости PBB_1, а ее проекция P_2 на плоскость ABC лежит на отрезке PB.

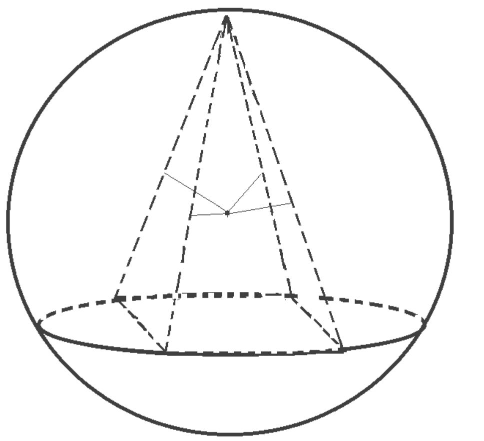
По условию сторона основания равна $4\sqrt{3}$, следовательно, $PN = 2$ и поэтому радиус шара OP, вписанного в призму, также равен 2. Так как шары с центрами в точках O и O_1 касаются друг друга, то отрезок $OO_1 = OP + O_1P_2$. Обозначим $OP = r$, $O_1P_2 = x$. Рассмотрим $\Delta\, OO_1T$, где $O_1T \perp OP$. В этом треугольнике $OO_1 = r + x$, $OT = r – x$. Поэтому $O_1T = \sqrt{[(r + x)^2(r – x)^2]} = 2\sqrt{(rx)}$.

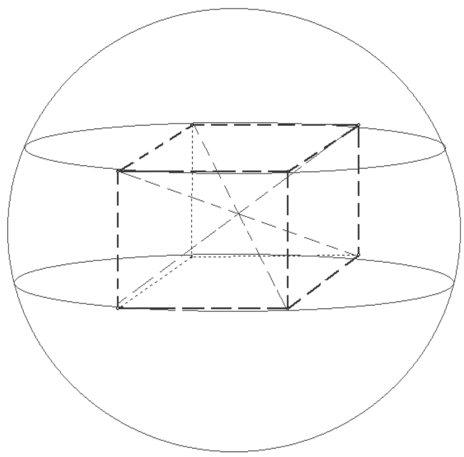
Так как фигура O_1P_2PT – прямоугольник, то $PP_2 = O_1T = 2\sqrt{(rx)}$. Далее, по свойству медиан треугольника $PB = 2r$, а $P_2B = 2x$, поскольку в прямоугольном треугольнике P_2LB: $\angle L = 90^{\circ}$, $\angle B = 30^{\circ}$ и $P_2L = x$. Поскольку $PB = PP_2 + P_2B$, то получаем уравнение $2r = 2\sqrt{(rx)} + 2x$, из которого, учитывая неравенство $x < r$, находим $x = (3 – \sqrt{5})r/2$. Подставив значение $r = 2$, окончательно находим

$x = 3 – \sqrt{5}$.

Ответ $3 – \sqrt{5}$.

Сфера, описанная около многогранника





Сфера называется ***описанной около многогранника***, если все его вершины лежат на этой сфере. При этом ***многогранник*** называется ***вписанным в сферу.***

Из определения следует, что если у многогранника существует описанная сфера, то все его грани являются вписанными многоугольниками и, следовательно, не каждый многогранник имеет описанную около него сферу.

Например, наклонный параллелепипед не имеет описанной сферы, т.к. вокруг параллелограмма нельзя описать окружность.

Центр сферы, описанной около прямой призмы – это середина отрезка, соединяющего центры окружностей, описанных около оснований прямой призмы.

Пример 7. Найти радиус описанной около куба сферы, если объем куба 27. Ответ записать в виде $R/\sqrt{3}$.

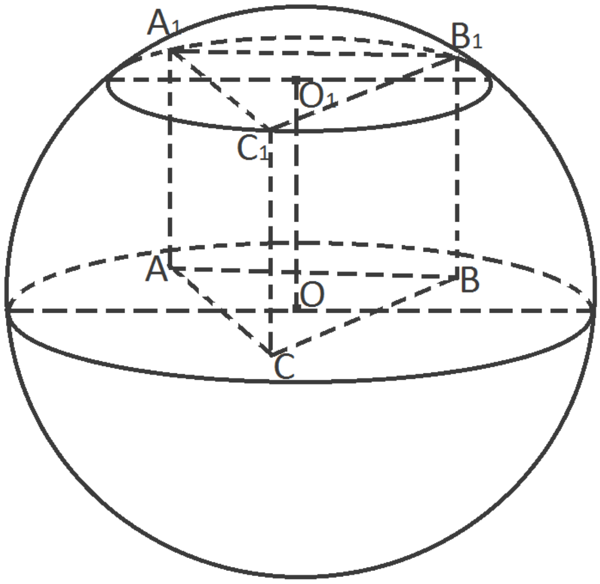
Решение: Объем куба $V = 27 \Rightarrow$ ребро куба $a = 3$. По теореме Пифагора диагональ куба $D = \sqrt{(3a^2)} = a\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

Тогда радиус найдем, как половину диагонали куба: $R = 3\sqrt{}/2 = 1{,}5\sqrt{3}$.

Запишем ответ в виде $1{,}5\sqrt{3}/\sqrt{3} = 1{,}5$.

Ответ 1,5.

Пример 8. Одно из оснований правильной треугольной призмы принадлежит большому кругу шара радиуса R, а вершины другого основания принадлежат поверхности этого шара. Определить высоту призмы, при которой ее объем будет наибольшим.



Решение: перпендикуляр к плоскости $A_1B_1C_1$, проведенный из центра описанного около этого треугольника круга, проходит через центр шара. Обозначим $OB_1 = R$, $OB = R_1$, $BB_1 = h = x$.

Тогда $R_1 = \sqrt{(R^2 - x^2)}$, $BC = R_1\sqrt{3}$, $BC = \sqrt{(3(R^2 - x^2))}$,

$S_{осн} = BC^2\sqrt{3}/4 = 3\sqrt{3}(R^2 - x^2)/4$; $V = S_{осн}h = 3\sqrt{3}x(R^2 - x^2)/4$;

$V(x) = (3\sqrt{3}xR^2 - 3\sqrt{3}x^3)/4$.

Найдем производную, приравняем ее к нулю. Получим

$V'(x) = (3\sqrt{3}R^2 - 9\sqrt{3}x^2)/4 = 0 \Rightarrow x = h = R/\sqrt{3}$.

Ответ $R/\sqrt{3}$.