Тема № 64 «Конус»

Основные теоретические сведения

Прямым круговым *конусом* называется тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет.

Конусом называется тело, которое состоит из круга – основание конуса, точки, не лежащей в плоскости этого круга – вершины конуса, и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания.

Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются *образующими конуса*.

Полная поверхность конуса состоит из основания и боковой поверхности.

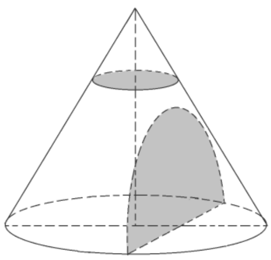
Конус называется прямым, если прямая соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания.

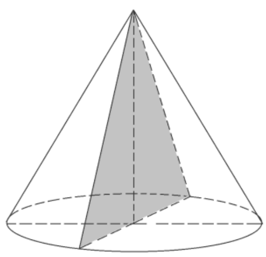
Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. У прямого конуса основание высоты совпадает с центром основания.

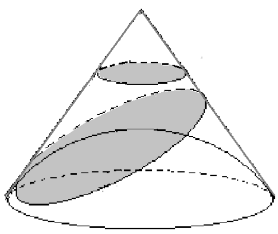
Осью прямого конуса называется прямая, содержащая его высоту.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называют осевым сечением.

Прямой конус можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета как оси.







Конические сечения как результат пересечения плоскости с конусом. Возможны 4 основных типа конических сечений: эллипс, парабола, круг, равнобедренный треугольник.

Центр тяжести любого конуса лежит на четверти высоты, считая от основания.

Плоскость, перпендикулярная оси конуса, отсекает от него меньший конус. Оставшуюся часть называют усеченным конусом. Усеченный конус можно получить и как тело вращения.

*Усеченным конусо*м называют тело вращения, образованное вращением прямоугольной трапеции около боковой стороны, перпендикулярной основаниям.

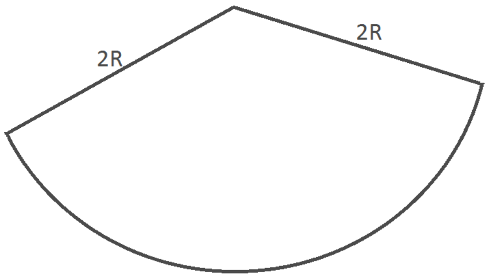
Сечениями усеченного конуса являются: эллипс, парабола, круг, равнобедренная трапеция.

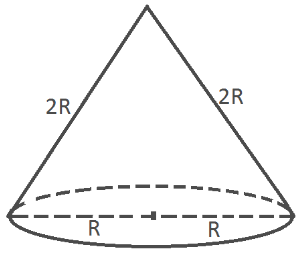
Площадь осевого сечения конуса (равнобедренный треугольник) с радиусом основания R и высотой конуса h: $S_{осев} = Rh$.

Конус (R - радиус основания, L – образующая, h - высота конуса):

$S_б = \pi RL$; $S_{пп} = \pi R^2 + \pi RL = \pi R(R + L)$; $V = 1/3\pi R^2 h$.

Усеченный конус (R_1 и R_2 – радиусы оснований; L – образующая, h - высота конуса): $S_{б\ ус} = \pi L(R_1 + R_2)$; $S_{пп\ ус} = \pi(R_1L + R_2L + R_1^2 + R_2^2)$; $V_{ус} = 1/3\pi h(R_1^2 + R_2^2)$.





Пример 1. Осевое сечение конуса – правильный треугольник. Определить угол в развертке этого конуса.

Решение:

Для конуса длина окружности основания $L = 2\pi R$.

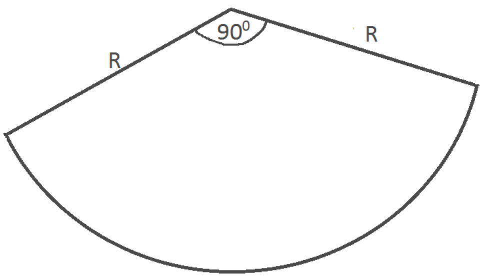
Для сектора с углом α длина окружности $L_\alpha = \pi(2R)\alpha/180º$.

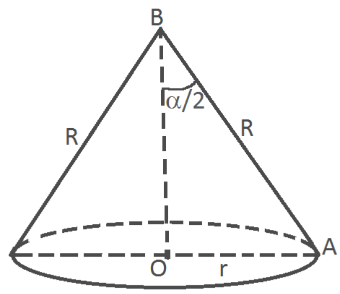
Длина окружности основания конуса равна длине окружности сектора с углом α развертки этого конуса.

Т.е. $2\pi R = \pi(2R)\alpha/180º$, $\alpha = 180º$.

Ответ 180º.

Пример 2. Угол в развертке конуса равен 90º. Определить угол в осевом сечении этого конуса.





Решение: Длина окружности сектора с углом $\alpha = 90º$:

$L_\alpha = \pi R\alpha/180º = \pi R90º/180º = \pi R/2$.

Длина окружности основания конуса $L = 2\pi r$.

Из равенства длин окружностей сектора и основания выразим r – радиус конуса:

$\pi R/2 = 2\pi r \Rightarrow r = R/4$.

В прямоугольном ΔAOB: $\sin(\alpha/2) = r/R = R/4R = ¼$, $\alpha/2 = arcsin¼$, $\alpha = 2arcsin¼$.

Ответ $2arcsin¼$.

Пример 3. Радиус основания конуса с вершиной в точке M и центром основания O равен r, а высота конуса равна h. Точка O_1 лежит на высоте конуса и $MO_1 : MO = a:b$. Через точку проведено сечение плоскостью, перпендикулярной высоте конуса. Найти площадь полученного сечения и длину отрезка OO_1.

Решение: Данное сечение – круг с центром в точке O_1 и радиусом равным r_1. Рассмотрим осевое сечение конуса, проходящее через концы диаметра PT основания