

## Тема № 54 «Арифметическая прогрессия»

Последовательность чисел, каждый следующий член которой равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, называется **арифметической прогрессией**. Это число называется **разностью арифметической прогрессии** и обозначается буквой  $d$ .

Рекуррентная формула  $n$ -го члена:  $a_{n+1} = a_n + d$

Формула  $n$ -го члена:  $a_n = a_1 + d(n - 1)$

Сумма первых  $n$  членов 1-я формула  $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$

Сумма первых  $n$  членов 2-я формула  $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$

Характеристическое свойство  $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$

Свойство крайних членов  $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$

Если  $d > 0$  арифметическая прогрессия является монотонно возрастающей.

Если  $d < 0$  арифметическая прогрессия является монотонно убывающей.

**Пример 1.** Том Сойер и Гекльберри Финн красят забор длиной 100 метров. Каждый следующий день они красят больше, чем в предыдущий, на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме они покрасили 20 метров забора. За сколько дней был покрашен весь забор?

Решение: Пусть ребята в первый день покрасили  $a_1$  метров забора, во второй —  $a_2$  метров и т.д., в последний —  $a_n$  метров забора. Тогда  $a_1 + a_n = 20$  (м), а за  $n$  дней было покрашено

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{20}{2} n = 10n \text{ (м)}.$$

Поскольку всего было покрашено 100 м забора, имеем:  $10n = 100$ , откуда  $n = 10$ .

Ответ 10.

**Пример 2.** Вычислить:  $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 999\,999 - 1\,000\,000$ .

Решение: Представим данное выражение в виде разности сумм:

$$(1 + 3 + 5 + \dots + 999\,999) - (2 + 4 + 6 + \dots + 1\,000\,000) = S_1 - S_2$$

$$a_n = a_1 + d(n - 1), \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

$$1) \quad 999\,999 = 1 + 2(n - 1), \quad 2n = 1\,000\,000, \quad n = 500\,000.$$

$$S_1 = (1 + 999\,999) \cdot 500\,000 / 2 = 250\,000\,000\,000.$$

$$2) \quad 1\,000\,000 = 2 + 2(n - 1), \quad 2n = 1\,000\,000, \quad n = 500\,000.$$

$$S_2 = (2 + 1\,000\,000) \cdot 500\,000 / 2 = 250\,000\,500\,000.$$

$$3) \quad S_1 - S_2 = 250\,000\,000\,000 - 250\,000\,500\,000 = -500\,000.$$

Ответ -500 000.

**Пример 3.** Вычислить сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 1112 и не делящихся на 15.

Решение: Найдем все числа, которые делятся на  $15 = 3 \cdot 5$ : 15; 30; 45; ...; 1110.

$$a_n = a_1 + d(n - 1),$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$$

$$15 + 15(n - 1) \leq 1112,$$

$$S_{74} = (2 \cdot 15 + 15(74 - 1)) \cdot 74 / 2 = 41\,625 - \text{это}$$

$$15(n - 1) \leq 1097,$$

сумма всех натуральных чисел кратных 15.

$$n - 1 \leq 73,13$$

$$S_{1112} = (2 \cdot 1 + 1(1112 - 1)) \cdot 1112 / 2 = 618\,828 -$$

$$n \leq 74,13$$

это сумма всех натуральных чисел  $\leq 1112$ .

$$n = 74.$$

$$S_{1112} - S_{74} = 618\,828 - 41\,625 = 577\,203.$$

Ответ 577 203.

**Пример 4.** Среди чисел вида  $(5n + 2)/7$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , найти сумму первых 70-ти целых чисел.

Решение: Все **целые** числа данного вида это: 1; 6; 11; 16; ... . (Их получим, если будем подставлять в формулу n-го члена  $n = 1, n = 2, \dots, n = 8, \dots, n = 15$  и т.д.)

$$a_n = a_1 + d(n - 1), \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$$

$$a_{70} = 1 + 5(70 - 1) = 346$$

$$S_{70} = (2 \cdot 1 + 5(70 - 1)) \cdot 70 / 2 = 347 \cdot 70 / 2 = 12\,145.$$

Ответ 12 145.

**Пример 5.** Среди чисел вида  $3n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , найти сумму первых 30-ти, которые при делении на 5 дают в остатке 2.

Решение: Числа, которые при делении на 5 дают в остатке 2, имеют вид  $5k + 2$ .

Найдем данные числа:  $5(3n + 1) + 2 = 15n + 7$ , т.е. это: 7; 22; 37; ...

$$a_n = a_1 + d(n - 1), \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

$$a_{30} = 7 + 15(30 - 1) = 442$$

$$S_{30} = (7 + 442) \cdot 30 / 2 = 6\,735.$$

Ответ 6 735.

**Пример 6.** Найти все значения  $x$ , при которых числа  $4x^2$ ,  $5x + 10$  и  $12 - 6x^2$  являются последовательными членами арифметической прогрессии, в указанном порядке.

Решение: Данные числа будут последовательными членами арифметической прогрессии, если второе число является средним арифметическим первого и второго:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$$

$$5x + 10 = (4x^2 + 12 - 6x^2)/2, \quad 2(5x + 10) = 12 - 2x^2, \quad 2x^2 + 10x - 8 = 0, \quad x^2 + 5x - 4 = 0.$$

Корни последнего уравнения  $-4$  и  $-1$ .

Ответ  $-4, -1$ .

**Пример 7.** В арифметической прогрессии второй член равен 5, разность равна 3, а сумма первых  $n$  членов прогрессии равна 222. Найти  $n$ .

Решение: Зная второй член прогрессии и разность, находим первый член

$$a_1 = 5 - 3 = 2. \text{ По формуле суммы } S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n \text{ находим:}$$

$$222 = (4 + 3(n-1))n/2; \quad 444 = 4n + 3n^2 - 3n; \quad 3n^2 + n - 444 = 0.$$

Натуральный корень последнего уравнения 12.

Ответ 12.

**Пример 8.** Найти сумму членов арифметической прогрессии  $a_1 + a_{11} + a_{12} + a_{22}$ , если  $a_3 + a_{20} = 24$ .

$$\text{Решение: } a_3 + a_{20} = a_1 + 2d + a_1 + 19d = 2a_1 + 21d = 24.$$

$$a_1 + a_{11} + a_{12} + a_{22} = a_1 + a_1 + 10d + a_1 + 11d + a_1 + 21d = 4a_1 + 44d = 2(2a_1 + 21d) = 48.$$

Ответ 48.

**Пример 9.** Найти сумму всех членов арифметической прогрессии 8; 6; ... с шестого по двенадцатый включительно.

Решение: Разность прогрессии равна  $d = 6 - 8 = -2$ . По формуле  $a_n = a_1 + d(n-1)$ , найдем  $a_6 = 8 - 2(6-1) = 8 - 12 + 2 = -2$ . С 6-го по 12-й ровно  $n = 7$  членов.

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n; \quad S_7 = (2 \cdot (-2) - 2(7-1))7/2 = (-4 - 14 + 2)3,5 = -56.$$

Ответ  $-56$ .

**Пример 10.** В арифметической прогрессии восьмой член равен  $-22$ , а двадцатый равен  $-58$ . Найти первый член этой прогрессии.

Решение:

$$\begin{cases} -22 = a_1 + 7d, \\ -58 = a_1 + 19d, \end{cases} \text{ Вычтем из 2-го уравнения 1-е, получим: } -36 = 12d, \quad d = -3.$$

$$\text{Тогда } a_1 = -22 + 3 \cdot 7 = -1.$$

Ответ  $-1$ .

**Пример 11.** В арифметической прогрессии второй член равен 3, а сумма 18 первых членов равна 1539. Найти разность этой прогрессии.

$$\text{Решение: Подставим все данные в формулы: } a_n = a_1 + d(n-1), \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$$

$$3 = a_1 + d, \text{ откуда } a_1 = 3 - d,$$

$$1539 = (2a_1 + 17d)18/2, \quad 1539 = (2a_1 + 17d)9 \quad | :9, \quad 171 = 2a_1 + 17d,$$

$$171 = 2(3 - d) + 17d, \quad 171 = 6 - 2d + 17d, \quad 15d = 165, \quad d = 11.$$

Ответ 11.

**Пример 12.** В арифметической прогрессии отношение третьего члена к девятому равно 4. Найти отношение пятьдесят первого к пятнадцатому.

Решение: Подставим данные задачи в формулу:  $a_n = a_1 + d(n - 1)$ ,

$$a_1 + 2d = 4(a_1 + 8d), \quad 3a_1 = -30d, \quad a_1 = -10d.$$

$$(a_1 + 50d) : (a_1 + 14d) = (-10d + 50d) : (-10d + 14d) = 40d : 4d = 10.$$

Ответ 10.