Тема 49 «Формулы числа сочетаний. Бином Ньютона».

Основные формулы комбинаторики.

	Порядок важен		Порядок неважен
Без повторений	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$P_n = A_n^n = n!$	$C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$
С повторения-ми	$\overline{A_n^k} = n^k$	$\overline{P_n} = \overline{A_n^n} = n^n$ $P(k_1, k_2, \dots, k_n) = \dfrac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1!\,k_2!\dots k_n!}$	$\overline{C_n^k} = \dfrac{(n+k-1)!}{(n-1!)k!}$
	Размещения	Перестановки	Сочетания

Пример 1. Сколько четных двузначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 4, 5, 9?

Решение: 1-й способ: Выпишем по порядку все числа от 10 до 99 и выберем те, что нам нужны: 10, 12, 14, 20, 22, 24, 40, 42, 44, 50, 52, 54, 90, 92, 94. Всего 15 пар.

2-й способ: Изобразим таблицу вариантов:

	0	2	4
1	**10**	**12**	**14**
2	**20**	**22**	**24**
4	**40**	**42**	**44**
5	**50**	**52**	**54**
9	**90**	**92**	**94**

Всего 5·3 = 15 чисел.

ПРАВИЛО УМНОЖЕНИЯ

Пусть объекты А и В не зависят друг от друга. Если объект А можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект В можно выбрать n способами, то пара объектов (А, В) в указанном порядке может быть выбрана mn способами.

В теории вероятностей понятие ***выборки*** обобщается. Вместо него используют понятие ***испытание***. Поэтому полезно знать правило умножения и на «языке» теории вероятностей.

ПРАВИЛО УМНОЖЕНИЯ:

Чтобы найти число всех возможных исходов проведения двух независимых испытаний А и В, надо перемножить число всех исходов испытания А и число всех исходов испытания В.

Замечание: Независимость событий А и В означает, что в такой паре (a,b) возможны абсолютно все комбинации исходов этих испытаний: при любом выборе «координаты» a в качестве «координаты» b можно выбрать любой исход события В.

3-й способ решения примера 1: Испытание А состоит в выборе первой цифры числа, и у него имеется 5 возможных исходов, а испытание В состоит в выборе второй цифры, и у него имеется 3 возможных исхода. Так как выбор первой цифры независим от выбора второй, то по правилу умножения, всего получается $5 \cdot 3 = 15$ исходов.
Ответ 15.

Пример 2. Сколько может быть различных комбинаций выпавших граней при бросании двух игральных костей?
Решение: На первой кости может быть: 1,2,3,4,5 и 6 очков, т.е. 6 вариантов (исходов). На второй – 6 вариантов. Бросают и первую, и вторую, значит, применяем правило умножения. Всего: $6 \cdot 6=36$ вариантов.
Ответ 36.

Пример 3. Сколько различных четырехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 2, 4, 6?
Решение: Число всех возможных перестановок цифр 0, 2, 4, 6 будет 4!, но нужно обратить внимание на 0 из этого числа перестановок нужно исключить те числа, которые начинаются с 0. Это всевозможные перестановки цифр 2, 4, 6, их количество равно 3!. Таким образом, число искомых чисел будет равно $4! - 3! = 24 – 6 = 18$
Ответ 18.

Пример 4. Имеется 9 различных книг, 4 из которых – учебники. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы все учебники стояли рядом?
Решение: Сначала рассмотрим все учебники как одну книгу. Тогда на полке надо расставить не 9, а 6 книг. Это можно сделать 6! способами. В каждой из полученных комбинаций можно выполнить 4! перестановок учебников. Значит, искомое число способов расположения книг на полке равно произведению $6! \cdot 4! = 17\ 280$
Ответ 17 280.

Пример 5. Сколько всего исходов в опыте бросания двух монет одновременно?
Решение: При бросании первой монеты возможны два исхода (орел или решка), при бросании второй монеты имеем тоже два исхода (орел или решка). По правилу умножения: $2 \cdot 2 = 4$.

Ответ 4.

Пример 6. Сколько всего исходов, если бросают одну и ту же монету два раза?

Решение: При бросании первый раз у монеты возможны два исхода (орел или решка), при бросании второй раз у монеты имеем тоже два исхода (орел или решка). Тогда $2 \cdot 2 = 4$.

Ответ 4.

Пример 7. Имеется 9 различных книг, 4 из которых – учебники. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы все учебники стояли рядом?
Решение: Сначала рассмотрим все учебники как одну книгу. Тогда на полке надо расставить не 9, а 6 книг. Это можно сделать $P_6 =6!$ способами. В каждой из полученных комбинаций можно выполнить $P_4 = 4!$ перестановок учебников. По правилу умножения независимых событий искомое число способов расположения книг на полке равно произведению $6! \cdot 4! = 720 \cdot 24 =17\ 280$.
Ответ 17 280.

Пример 8. У Пети есть 7 монет по 1 рублю и 3 монеты по 2 рубля. Петя случайным образом выбирает 1 монету номиналом 1 рубль и 1 монету номиналом 2 рубля. Сколькими способами он может это сделать?
Решение: Для начала выясним, сколькими способами Петя может выбрать 1 монету из 7 имеющихся номиналом 1 рубль:

$$C_7^1 = \frac{7!}{1!\,(7-1)!} = \cdots = 7$$

Аналогично, найдем число способов выбрать 1 монету номиналом 2 рубля из имеющихся 3 монет:

$$C_3^1 = \frac{3!}{1!\,(3-1)!} = \cdots = 3$$

Теперь, согласно закону умножения, найдем общее число способов:

$$X = C_7^1 \cdot C_3^1 = \ =7 \cdot 3 = 21.$$

Ответ 21.

Пример 9. В корзине лежат 8 белых шаров и 12 черных. Сколькими способами можно достать из этой корзины 2 белых шара и 2 черных?
Решение: Всего в корзине n = 8 белых шаров, из которых надо выбрать k = 2 шара. Это можно сделать C_8^2 = … = 28 различными способами.
Кроме того, в корзине имеется n = 12 черных шаров, из которых надо выбрать опять же k = 2 шара. Число способов сделать это равно C_{12}^2 = … = 66.
Поскольку выбор белого шара и выбор черного — события независимые, общее число комбинаций считается по правилу умножения: 28 · 66 = 1848. Как видим, вариантов может быть довольно много.
Ответ 1848.

Пример 10. В 10 «Б» классе в среду 7 уроков: алгебра, геометрия, литература, физкультура, русский язык, английский, биология.
А) сколько можно составить различных вариантов расписания на среду?
Б) В скольких расписаниях физкультура будет последним уроком?
В) В скольких вариантах расписания естественно-математические и гуманитарные предметы будут идти блоками, разделенными уроком физкультуры?
Решение:
А) Каждое возможное расписание задает нумерацию семи названных предметов числами 1 2 3 4 5 6 7 в соответствии с порядковым номером урока. Таких нумераций всего 7! = 5040.
Б) 6 уроков (кроме физкультуры) надо распределить по номерам 1 - 6. Всего имеется 6! =720 вариантов.
В) Физкультуру следует поставить 4-ым уроком. Расписание будет составлено, как только мы проведем следующие три независимых испытания. Во-первых, выбор блока (1-й - 3-й или 5-й – 7-й уроки) для гуманитарных предметов. Тут возможны 2 исхода: поставить этот блок до урока физкультуры или после него. Алгебра, геометрия и биология автоматически окажутся в другом блоке. Во- вторых, выбор порядка гуманитарных предметов в уже выбранном блоке: P_3 = 3! = 6 различных перестановок. В-третьих, следует посчитать и все перестановки для естественно-математических предметов – их тоже 6. По правилу умножения получаем:
2 · 6 · 6 = 72.

Ответ 72.

Пример 11. Собрание из 80 человек выбирает председателя, секретаря и трех членов редакционной комиссии. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

Председателем может быть любой из участников собрания – 80 вариантов. Если председатель выбран, секретарем может оказаться любой из оставшихся 79 человек – 79 вариантов. По правилу умножения получим (в предположении независимости выбора секретаря и председателя), что выбор председателя и секретаря осуществляется 80·79 = 6320 способами.

Если испытание А – выбор председателя и секретаря – завершено, то следует заняться испытанием В – выбором трех членов комиссии из оставшихся 78 участников собрания. Редакционную комиссию выбирают списком, т.е. порядок отбора не имеет значения. Сделать это можно C_{78}^{3} способами. Имеем: $C_{78}^{3} = \frac{78 \cdot 77 \cdot 76}{2} = 76\ 076$.

Поскольку А и В предполагаются независимыми, применим правило умножения: 6 320 · 76 076 = 480 800 320 способов.

Ответ 480 800 320.

Пример 12. Сколько существует всего исходов, если друг за другом из колоды вынимают три карты, возвращая карту обратно (выбор с возвращением).

Решение: Для первой карты возможно 36 возможностей выбора. Когда первую карту вытащили, то положив ее обратно, в колоде стало снова 36 карт, значит для второй карты тоже 36 возможных исходов. Для третьей карты все то же самое. По правилу умножения имеем n = 36 · 36 · 36 = 46 656.

Ответ 46 656.

Пример 13. Из 3-х экземпляров учебника алгебры, 7-ми экземпляров учебника геометрии, 6-ти экземпляров учебника физики надо выбрать один комплект, содержащий все три учебника по одному разу. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Пусть А - «выбор 1 учебника алгебры», N(A)=3, В - «выбор 1 учебника геометрии», N(B)=7, С – «выбор 1 учебника физики», N(C)=6. Применяя правило умножения, получим: 3·7·6=126 способов.

Ответ 126.

ПРАВИЛО СЛОЖЕНИЯ:

Если некоторый объект А может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект В может быть выбран n способами, то

1. *выбрать либо А, либо В можно (m + n) способами, если А и В не имеют общих элементов.*
2. *выбрать либо А, либо В можно (m + n – d) способами, если А и В имеют d общих элементов.*

Другими словами, при объединении взаимоисключающих действий число их комбинаций складывается.

Если правило умножения оперирует «изолированными» событиями, которые не зависят друг от друга, то в правиле сложения все наоборот. Здесь рассматриваются взаимоисключающие события, которые никогда не случаются одновременно.

Например, «Петя вынул из кармана 1 монету» и «Петя не вынул из кармана ни одной монеты» — это взаимоисключающие события, поскольку вынуть одну монету и при этом не вынуть ни одной невозможно.

Аналогично, события «Выбранный наугад шар — белый» и «Выбранный наугад шар — черный» также являются взаимоисключающими.

Можно сказать, что закон сложения — это логическое «ИЛИ» в комбинаторике, когда нас устраивает любой из взаимоисключающих вариантов. И наоборот, закон умножения — это логическое «И», при котором нас интересует одновременное выполнение и первого, и второго действия.

Пример 14. В коробке находится 10 шаров: 3 белых, 2 черных, 1 синий и 4 красных. Сколькими способами можно взять из ящика цветной шар?
Решение: Цветной шар – это синий или красный. Выбрать синий можно одним способом, а выбрать красный шар – 4 варианта, поэтому по правилу сложения:
1 + 4 = 5 способов.
Ответ 5.
Пример 15. Из 20 вопросов к экзамену ученик 12 выучил, 5 совсем не смотрел, а в остальных что-то знает, а что-то нет. На экзамене будет три вопроса.
а) Найти количество возможных вариантов билета.
б) Сколько из них тех, в которых ученик знает все вопросы?
в) Сколько из них тех, в которых есть вопросы всех трех типов?
г) Сколько из них тех, в которых ученик выучил большинство вопросов?
Решение:
а) Порядок вопросов в билете не важен. Поэтому возможны

$C_{20}^{3}=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{3!}=60\cdot 19=1140$ вариантов билета.

б) Тут все три вопроса надо выбирать из тех 12, которые выучил ученик:

$$C_{12}^{3}=\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3!}=2\cdot 110=220.$$

в) Билет подобного типа составляется так: следует выбрать независимо друг от друга по одному вопросу – из блока выученных 12 вопросов, из блока тех 5-ти, что он не смотрел и из оставшихся 3-х вопросов. По правилу умножения получим:
12·5·3 = 180.
г) Большинство вопросов из трех – это два или три. Выбрать два из 12 выученных вопросов и один из оставшихся 8 вопросов можно (по правилу умножения)

$C_{12}^{2}\cdot C_{8}^{1}=\frac{12\cdot 11}{2}\cdot 8=528$ способами. А билеты, в которых все вопросы выучены, уже посчитаны в пункте б), их всего 220. В итоге, применяя правило сложения, получим 528 + 220 = 748 билетов.

Ответ а) 1140, б) 220, в) 180, г) 748.
Пример 16. Из класса нужно выделить одного дежурного, мальчика или девочку. Сколько существует способов для выбора дежурного, если в классе 22 девочки и 18 мальчиков?

Решение: Выбрать одну девочку из 22 мы можем 22-мя способами, а одного мальчика из 18 можно 18-тью способами. Тогда выбрать одного дежурного мальчика или девочку можно 18 + 22 = 40 способами.
Ответ 40.

Пример 17. В классе из 25 человек 19 красивых и 13 умных. Все дети являются или (и) красивыми, или (и) умными. Сколькими способами можно выбрать 5 человек среди красивых и умных?
Решение: Пусть X – количество и красивых и умных, тогда применим 2-ю формулу сложения: 25 = 19 + 13 – X, откуда найдем X = 32 – 25 = 7 человек и красивых и умных. Порядок не важен, тогда $C_7^5 = \frac{7!}{(7-5)!\cdot 5!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5!}{2\cdot 5!} = 21$.
Ответ 21.

Пример 18. В корзине лежат 9 черных шаров и 7 красных. Мальчик достает 2 шара одинакового цвета. Сколькими способами он может это сделать?
Решение: Если шары одинакового цвета, то вариантов немного: оба они либо черные, либо красные. Очевидно, что эти варианты — взаимоисключающие.
В первом случае мальчику предстоит выбирать k = 2 черных шара из n = 9 имеющихся. Число способов сделать это равно C_9^2 = … = 36.
Аналогично, во втором случае выбираем k = 2 красных шара из n = 7 возможных. Число способов равно C_7^2 = … = 21.
Осталось найти общее количество способов. Поскольку варианты с черными и красными шарами — взаимоисключающие, по закону сложения имеем:
X = 36 + 21 = 57.
Ответ 57

Пример 19. В ларьке продаются 15 роз и 18 тюльпанов. Ученик 9-го класса хочет купить 3 цветка для своей одноклассницы, причем все цветы должны быть одинаковыми. Сколькими способами он может составить такой букет?
Решение: По условию, все цветы должны быть одинаковыми. Значит, будем покупать либо 3 розы, либо 3 тюльпана. В любом случае, k = 3.
В случае с розами придется выбирать из n = 15 вариантов, поэтому число сочетаний равно C_{15}^3 = … = 455. Для тюльпанов же n = 18, а число сочетаний — C_{18}^3 = … = 816.
Поскольку розы и тюльпаны — это взаимоисключающие варианты, работаем по закону сложения. Получаем общее число вариантов X = 455 + 816 = 1271.
Это и есть ответ.
Ответ 1271.

Пример 20. Встретились 11 футболистов и 6 хоккеистов и стали играть друг с другом по одному разу в шашки. Сколько было встреч: а) между футболистами, б) между хоккеистами, в) между теми и другими, г) всего?
Решение: а) $C_{11}^2 = \frac{11\cdot 10}{2} = 55$. б) $C_6^2 = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$.
в) Тут надо действовать по правилу умножения. Одно испытание – выбор футболиста, а другое испытание – выбор хоккеиста. Испытания предполагаются независимыми, и у них соответственно 11 и 6 исходов. Значит, получится 11 · 6 = 66 игр.
г) Можно сложить все предыдущие ответы: 55 + 15 + 66 == 136, но можно использовать формулу: $C_{17}^2 = \frac{17\cdot 16}{2} = 136$.

Дополнительные условия и ограничения

Очень часто в тексте задачи присутствуют дополнительные условия, накладывающие существенные ограничения на интересующие нас сочетания. Сравните два предложения:

1. Имеется набор из 5 ручек разных цветов. Сколькими способами можно выбрать 3 ручки для обводки чертежа?
2. Имеется набор из 5 ручек разных цветов. Сколькими способами можно выбрать 3 ручки для обводки чертежа, если среди них обязательно должен быть красный цвет?

Чувствуете разницу? В первом случае мы вправе брать любые цвета, какие нам нравятся — дополнительных ограничений нет. Во втором случае все сложнее, поскольку мы обязаны выбрать ручку красного цвета (предполагается, что она есть в исходном наборе).

Очевидно, что любые ограничения резко сокращают итоговое количество вариантов. Ну и как в этом случае найти число сочетаний? Просто запомните следующее правило:

Пусть имеется набор из n элементов, среди которых надо выбрать k элементов. При введении дополнительных ограничений числа n и k уменьшаются на одинаковую величину.

Другими словами, если из 5 ручек надо выбрать 3, при этом одна из них должна быть красной, то выбирать придется из $n = 5 – 1 = 4$ элементов по $k = 3 – 1 = 2$ элемента. Таким образом, вместо C_5^3 надо считать C_4^2.

Теперь посмотрим, как это правило работает на конкретных примерах:

Пример 21. В группе из 20 студентов, среди которых 2 отличника, надо выбрать 4 человека для участия в конференции. Сколькими способами можно выбрать этих четверых, если отличники обязательно должны попасть на конференцию?

Решение: Итак, есть группа из $n = 20$ студентов. Но выбрать надо лишь $k = 4$ из них. Если бы не было дополнительных ограничений, то количество вариантов равнялось числу сочетаний C_{20}^4.

Однако нам поставили дополнительное условие: 2 отличника должны быть среди этих четырех. Таким образом, согласно приведенному выше правилу, мы уменьшаем числа n и k на 2. Имеем:

$$C_{20-2}^{4-2} = C_{18}^{2} = \frac{18!}{2!(18-2)!} = \cdots = 153$$

Ответ 153.

Пример 22. У Пети в кармане есть 8 монет, из которых 6 монет по рублю и 2 монеты по 10 рублей. Петя перекладывает какие-то три монеты в другой карман. Сколькими способами Петя может это сделать, если известно, что обе монеты по 10 рублей оказались в другом кармане?

Решение: Итак, есть $n = 8$ монет. Петя перекладывает $k = 3$ монеты, из которых 2 — десятирублевые. Получается, что из 3 монет, которые будут переложены, 2 уже зафиксированы, поэтому числа n и k надо уменьшить на 2. Имеем:

$$C_{8-2}^{3-2} = C_{6}^{1} = \frac{6!}{1!(6-1)!} = \cdots = 6$$

Ответ 6.

Бином Ньютона

Бином Ньютона – это формула, представляющая выражение (a + b)^n при положительном целом n в виде многочлена:

$$(a+b)^n = C_n^0\, a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Заметим, что сумма показателей степеней для a и b постоянна и равна n.

Числа $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}$ называются биномиальными коэффициентами.

Запишем известные нам формулы в виде:

$$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$$
$$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2$$
$$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 b + 3 \cdot b^2 a + 1 \cdot b^3$$

Знаком умножения отделены числовые коэффициенты при одночленах. Заметим, что 1 = C_3^0, 3 = C_3^1, 3 = C_3^2, 1 = C_3^3 (в формуле куба суммы).

Для чисел C_n^k имеется красивый и удобный способ их записи в виде треугольной таблицы. Ее называют треугольником Паскаля:

$$\begin{array}{c}
C_1^0 \quad C_1^1 \\
C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2 \\
C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3 \\
C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4 \\
C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}$$

Их можно вычислить, применяя только сложение, если пользоваться следующей схемой. В верхней строке пишем две единицы. Все последующие строки начинаются и заканчиваются единицей. Промежуточные числа в этих строках получаются суммированием соседних чисел из предыдущей строки.

Некоторые биномиальные формулы полезно запомнить:

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $0! = 1$,	$C_n^0 = C_n^n = 1,\ C_n^1 = C_n^{n-1} = n$, $C_n^2 = C_n^{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$, $C_n^3 = C_n^{n-3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$, $C_n^k = C_n^{n-k}$, $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$, $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$.

Замечание. Сумма коэффициентов в разложении (a + b)^n равна 2^n.

Пример 23. Разложить выражение: $(a + b)^7$.

Мы можем получить результат моментально, используя таблицу:

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
....

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

Для того чтобы получит формулу бинома Ньютона для 3-х и более слагаемых в скобках, необходимо вспомнить формулы комбинаторики, использующие повторения.

Пример 24. Сколькими способами можно разложить 28 *различных* предметов по четырем *различным* ящикам, так, чтобы в каждом ящике, оказалось, по 7 предметов?

Решение: $P(7,7,7,7) = \frac{28!}{7!7!7!7!} = \frac{28!}{(7!)^4} = 189\,635\,846\,400$ способов.

Ответ 189 635 846 400.

В примере 11 было существенно, что ящики можно отличить друг от друга (например, они покрашены в разные цвета).

Пример 25. Сколькими способами можно положить 28 *различных* открыток в 4 *одинаковых* конверта так, чтобы в каждом конверте лежало по 7 открыток?

Решение: Сначала пометим конверты цифрами 1, 2, 3, 4. Тогда согласно примеру 18 число различных раскладок равно $P(7,7,7,7)$. После этого сотрем пометки. Теперь конверты можно произвольным образом переставлять друг с другом, не меняя результата раскладки (ведь теперь они неотличимы друг от друга). Так как число различных перестановок четырех конвертов равно $P_4 = 4!$, то число раскладок уменьшается в 4! Раз, и потому оно равно

$$\frac{1}{4!}P(7,7,7,7) = \frac{28!}{4!\,7\,(7!)^4} = 7\,901\,493\,600$$

Ответ 7 901 493 600.

Легко доказать, использующие в формулу числа сочетаний, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Заметим, что так как

$$\mathrm{C}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{k})!\,\mathbf{k}!} = \mathbf{P}(\mathbf{n}-\mathbf{k},\mathbf{k})\,,$$

То формулу бинома Ньютона можно записать следующим образом:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} P(n-k,k)a^{n-k}b^k\,.$$

Такая запись обобщается на случай большего числа слагаемых в скобке. Именно для любых k и t верна формула

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_t)^k = \sum P(k_1, k_2, \ldots, k_t)a_1{}^{k_1}a_2{}^{k_2} \ldots\ a_t{}^{k_t}\ ,$$

где сумма распространяется на все числовые кортежи $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ из неотрицательных целых чисел, такие, что $k = k_1 + k_2 + \dots + k_t$.

Замечание. Сумма коэффициентов в разложении $(a_1 + a_2 + \dots + a_t)^k$ равна t^k.

Пример 26. Раскрыть скобки в выражении $(a + b + c)^3$.
Решение: Ответ имеет вид:

$$(a+b+c)^3 = \sum P(k_1, k_2, k_3) a^{k_1} b^{k_2} c^{k_t} \ ,$$

где сумма распространяется на все кортежи (k_1, k_2, k_3) такие, что $3 = k_1 + k_2 + k_3$. Ими являются кортежи (3,0,0,), (0,3,0), (0,0,3), (2,1,0), (2,0,1), (1,2,0), (1,0,2), (0,1,2), (0,2,1), (1,1,1). Так как

$$P(3{,}0{,}0,) = P(0{,}3{,}0) = P(0{,}0{,}3) = \frac{3!}{0!\,0!\,3!} = 1 \,,$$

$$P(2{,}1{,}0) = P(2{,}0{,}1) = P\big(1{,}2{,}0) = P(1{,}0{,}2) = P(0{,}2{,}1) = P(0{,}1{,}2)\big) = \frac{3!}{2!\,1!\,0!} = 3 \,,$$

$$P(1{,}1{,}1) = \frac{3!}{1!\,1!\,1!} = 6 \,,$$

то получим ответ

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc.$$

Пример 27. Найти сумму коэффициентов в разложении $(a + b + c)^4$.
Решение: Зная, что сумма коэффициентов в разложении $(a + b + c)^4$ равна 3^4=81.
Ответ 81.

Пример 28. Найти сумму коэффициентов в разложении $(a + b + c + d)^5$.
Решение: Зная, что сумма коэффициентов в разложении $(a + b + c + d)^5$ равна 4^5= 1024.
Ответ 1024.