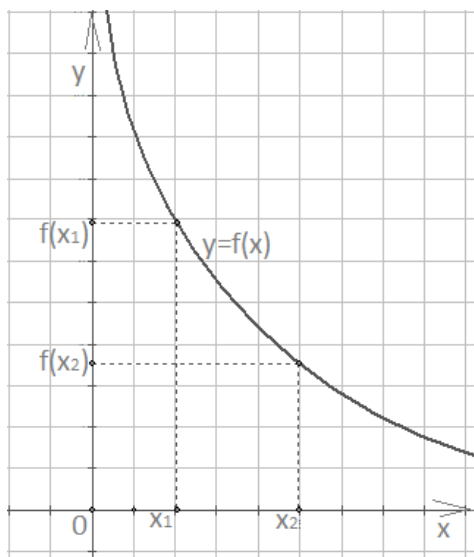
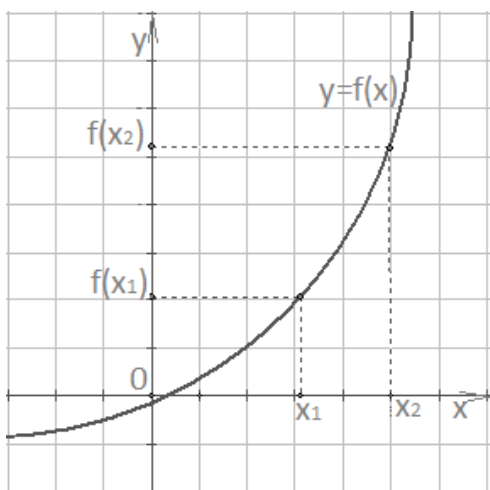


Тема №38 «Возрастание и убывание функций». (без вычисления производной)

В данном разделе рассмотрим задачи на возрастание и убывание функции, в которых не надо вычислять производные.



Функцию $y = f(x)$ называют **убывающей** на промежутке, если для любых x_1 и x_2 принадлежащих этому промежутку, из условия $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) < f(x_1)$.



Функцию $y = f(x)$ называют **возрастающей** на промежутке, если для любых x_1 и x_2 принадлежащих этому промежутку, из условия $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) > f(x_1)$.

Т.е. положительному приращению аргумента $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$ соответствует положительное приращение функции

$\Delta f = f(x_2) - f(x_1) > 0$. Значит, $\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$. Отсюда

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f' > 0$. Аналогично доказыва-

ется и для убывающей функции. Итак, получили правило:

Если на промежутке производная функции положительна, то функция возрастает.

Если на промежутке производная функции отрицательна, то функция убывает.

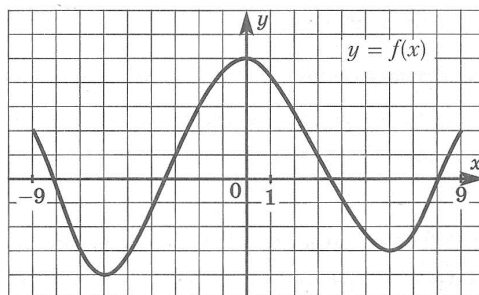
Точки области определения функции, в которых производная равна нулю называются **стационарными точками**.

Точки, в которых производная равна нулю или не существует называются **критическими точками**.

Если при переходе через критическую точку $x_0 \in D(f)$, производная функции меняет знак с «+» на «-», то x_0 – **точка локального максимума функции**.

Если при переходе через критическую точку $x_0 \in D(f)$, производная функции меняет знак с «-» на «+», то x_0 – **точка локального минимума функции**.

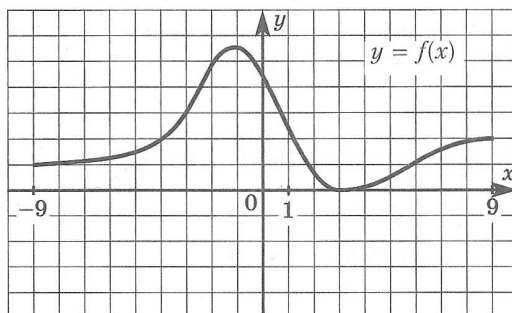
Пример 1. Определить по графику промежутки возрастания функции.



Решение: Если функция возрастает, то при движении по графику слева направо ординаты увеличиваются. Следовательно, функция возрастает на отрезках $[-6; 0] \cup [6; 9]$.

Ответ $[-6; 0] \cup [6; 9]$.

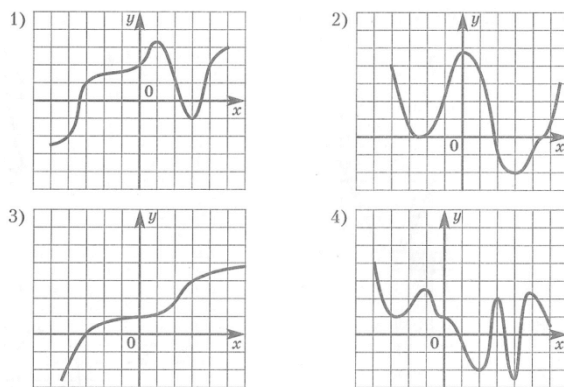
Пример 2. Определить по графику промежутки убывания функции.



Решение: Если функция убывает, то при движении по графику слева направо ординаты уменьшаются. Следовательно, функция убывает на отрезке $[-1; 2]$.

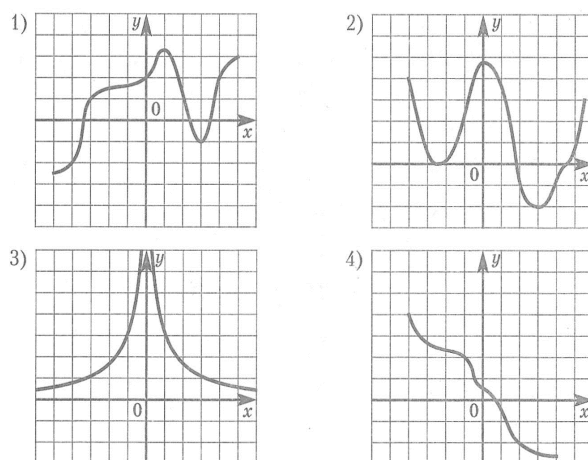
Ответ $[-1; 2]$.

Пример 3. Укажите график возрастающей функции.



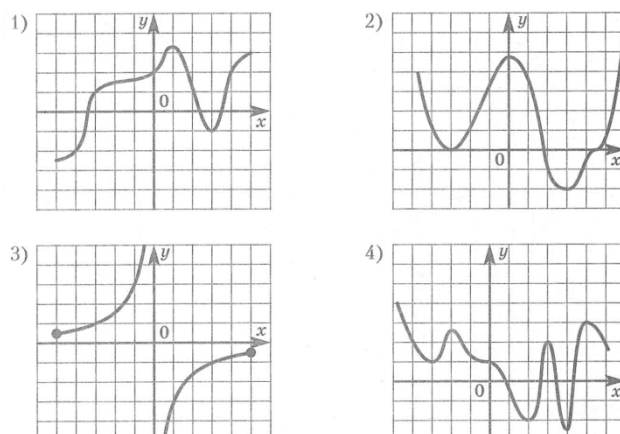
Ответ 3.

Пример 4. Укажите график убывающей функции.



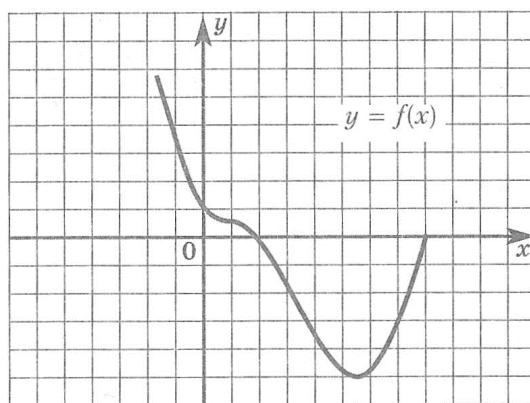
Ответ 4.

Пример 5. Указать интервалы возрастания функций, графики которых представлены на рисунках:



Ответ 1) $[-5; 1] \cup [3; 5]$, 2) $[-3; 0] \cup [3; 6]$, 3) $[-5; 0] \cup (0; 5]$, 4) $[-3; -2] \cup [2; 3] \cup [4; 5]$.

Пример 6. Определить по графику функции $y = x^4 - x^3 + bx + c$ знаки коэффициентов b и c .

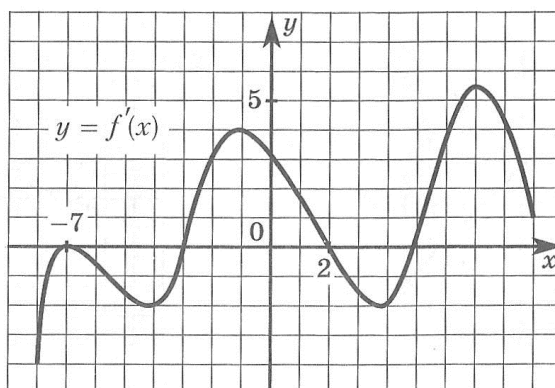


Решение: Заметим, что $c = f(0)$, следовательно, $c > 0$.

Также заметим, что $b = f'(0)$, и, следовательно, $b < 0$, так как на интервале, содержащем точку 0, функция убывает.

Ответ $c > 0$, $b < 0$.

Пример 7. Определить по графику производной функции $y = f'(x)$ точку максимума.

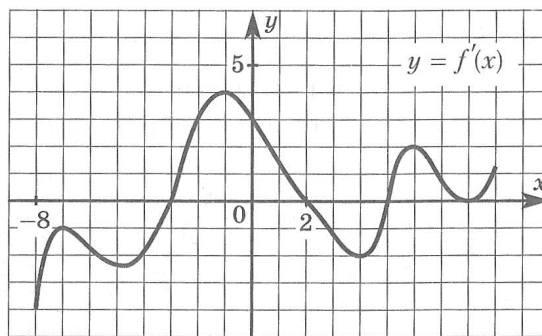


Решение: Если при переходе через критическую точку $x_0 \in D(f)$ производная функции меняет знак с «+» на «-», то x_0 — точка локального максимума функции.

Критическими точками функции являются точки -7 , -3 , 2 , 5 . Производная меняет знак с «+» на «-» в точке $x_0 = 2$.

Ответ 2.

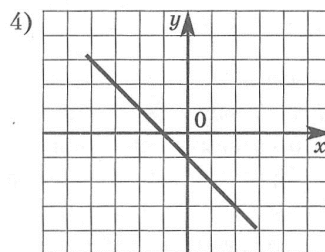
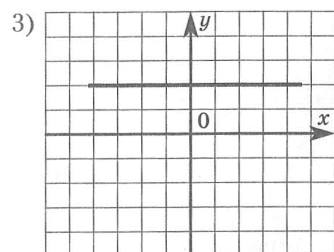
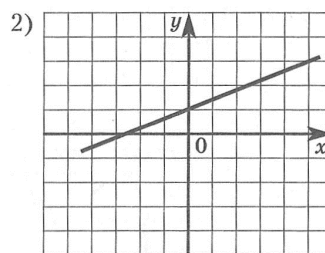
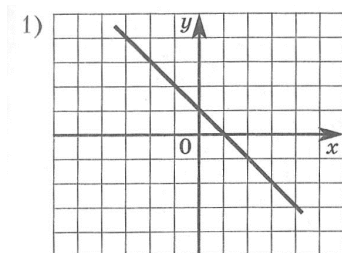
Пример 8. Указать интервалы убывания функции, если задан график ее производной.



Решение: Если непрерывная функция убывает на множестве, то ее производная не больше нуля (график ниже оси OX). Поэтому, функция убывает на $[-8; -3] \cup [2; 5]$.

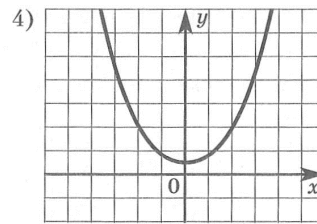
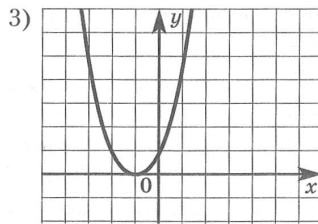
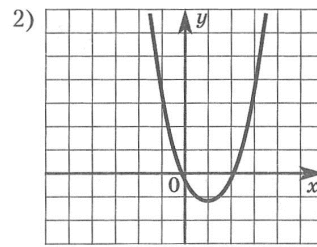
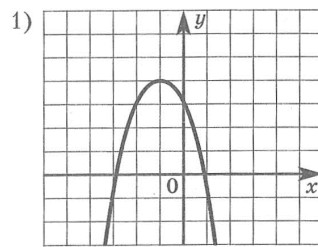
Ответ $[-8; -3] \cup [2; 5]$.

Пример 9. Определить по графику функции $y = kx + b$ знаки коэффициентов k и b .



Ответы 1) $k < 0$, $b > 0$, 2) $k > 0$, $b > 0$, 3) $k = 0$, $b > 0$, 4) $k < 0$, $b < 0$.

Пример 10. Определить по графикам функции $y = ax^2 + bx + c$, указанных на рисунках, знаки коэффициентов a , b , c и дискриминанта D .



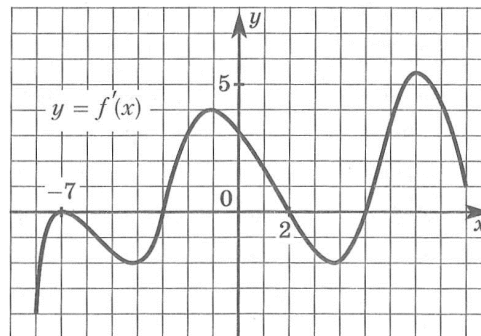
Решение: 1) Ветви параболы вниз, значит $a < 0$. Коэффициент c найдем, как $y(0) = c$, очевидно $c > 0$. Если парабола пересекает ось Ox в двух точках, то дискриминант положительный. Коэффициент b найдем из формулы для, заметим, отрицательной абсциссы вершины параболы:

$$x = -\frac{b}{2a} < 0, \quad a < 0, b < 0. \text{ Аналогично рассуждают и в 2) – 4).}$$

Ответы 1) $a < 0, b < 0, c > 0, D > 0$; 2) $a > 0, b < 0, c = 0, D > 0$;

3) $a > 0, b > 0, c > 0, D = 0$; 4) $a > 0, b = 0, c > 0, D < 0$.

Пример 11. Определить точку минимума функции $y = f(x)$, если дан график ее производной. Если таких точек несколько, то найти их сумму.

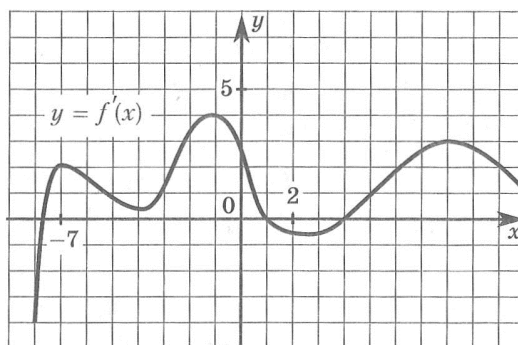


Решение: Если при переходе через критическую точку $x_0 \in D(f)$ производная функции меняет знак с «-» на «+», то x_0 — точка локального минимума функции.

Критическими точками функции являются точки $-7, -3, 2, 5$. Производная меняет знак с «-» на «+» в точках -3 и 5 . Значит ответ $-3 + 5 = 2$.

Ответ 2.

Пример 12. Определить точку максимума функции $y = f(x)$, если дан график ее производной. Если таких точек несколько, то найти их произведение.

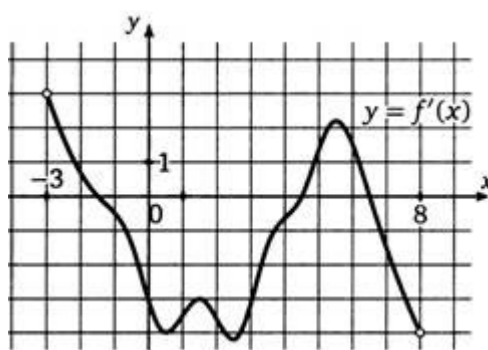


Решение: Если при переходе через критическую точку $x_0 \in D(f)$ производная функции меняет знак с «+» на «-», то x_0 — точка локального максимума функции.

Критическими точками функции являются точки $-7, 4$; 1 ; 4 . Производная меняет знак с «+» на «-» в точке $x_0 = 1$.

Ответ 1.

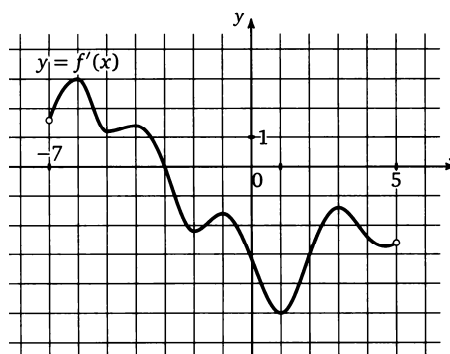
Пример 13. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых чисел, входящих в эти промежутки.



Решение: Функция убывает на тех промежутках, на которых график производной находится ниже оси Ox . Это примерно такие промежутки: $(-1, 5; 4, 5)$, $(6, 5; 8)$. Количество целых точек, входящих в эти промежутки 7. Найдем сумму этих точек: $-1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 7 = 16$.

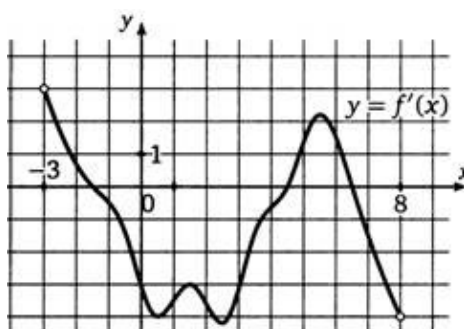
Ответ: 16.

Пример 14. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 5)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащей отрезку $[-6; 4]$.



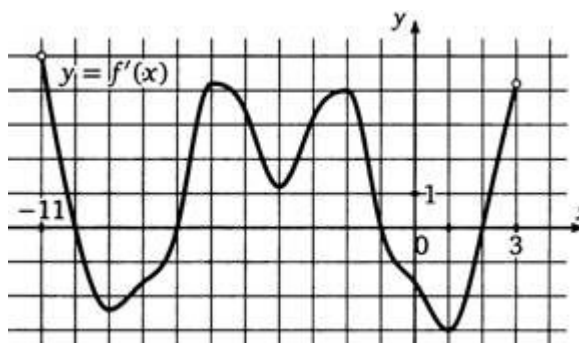
Решение: Производная равна нулю в точке $x = -3$. В этой точке производная меняет знак с «+» на «-», значит $x = -3$ – точка локального максимума.
 Ответ -3.

Пример 15. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2; 7]$.



Решение: График функции в трех точках пересекает ось Ox . И только в двух из них производная меняет знак с «+» на «-».
 Ответ 2.

Пример 16. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11; 3)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Решение: Функция возрастает на тех промежутках, на которых график производной расположен выше оси ОХ. Это промежутки: $(-11;-10)$, $(-7;-1)$, $(2;3)$. Длина наибольшего из них равна $-1 - (-7) = 6$.

Ответ: 6.

Пример 17. Найти множество значений функции:

$$y = \log_{0,5} \left(\frac{24}{11 + \sqrt{1 + |\ln x|}} \right).$$

Схема решения:

- 1) Поочередно найти множества значений функции $y = \ln x$, $y = |\ln x|$, $y = 1 + |\ln x|$, $y = \sqrt{1 + |\ln x|}$, $y = 11 + \sqrt{1 + |\ln x|}$.
- 2) Найти множество значений дроби $\frac{24}{11 + \sqrt{1 + |\ln x|}}$.
- 3) Найти искомое множество решений.

Решение:

- 1) Множество значений логарифмической функции – вся числовая прямая, т.е. $E(\ln x) = \mathbb{R}$. Поэтому $E(|\ln x|) = [0; +\infty)$ и $E(1 + |\ln x|) = [1; +\infty)$,
 $E(\sqrt{1 + |\ln x|}) = [1; +\infty)$, $E(11 + \sqrt{1 + |\ln x|}) = [12; +\infty)$.

- 2) По свойствам неравенств

$$0 < \frac{24}{11 + \sqrt{1 + |\ln x|}} \leq \frac{24}{12} = 2, \text{ т. е. } E\left(\frac{24}{11 + \sqrt{1 + |\ln x|}}\right) = (0; 2].$$

- 3) Так как $z = \log_{0,5} t$ – убывающая и непрерывная функция, то

$$\log_{0,5} \left(\frac{24}{11 + \sqrt{1 + |\ln x|}} \right) > \log_{0,5} 2 = -1 \text{ и } E(y) = [-1; +\infty).$$

Ответ $[-1; +\infty)$.