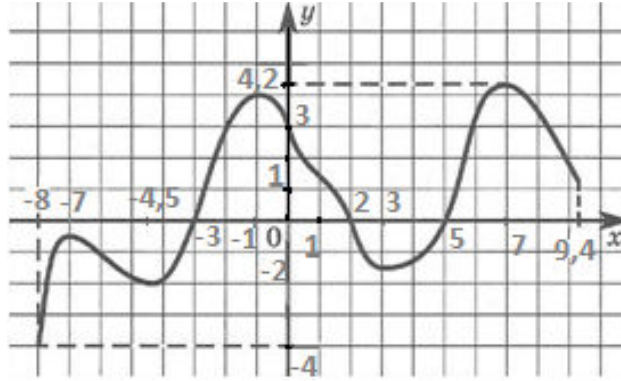


Тема №36 «Свойства функций»

Свойства функции разберем на примере о графика произвольной функции $y = f(x)$:



1. *Область определения функции* — это множество всех значений переменной x , которые имеют соответствующие им значения функции. Обозначают: $D(f)$.

На графике область определения — это промежутки на оси OX , над которыми (или под которыми) имеются части графика. Для нашего примера $D(f) = [-8; 9,4]$.

2. *Область значений функции* — это множество всех ее значений y . Обозначают: $E(f)$.

На графике область значений функции — это промежутки на оси OY , слева или справа от которых (в горизонтальной полосе) находятся части графика.

Для нашего примера $E(f) = [-4; 4,2]$.

3. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей*, если для любой пары значений аргументов x_1, x_2 из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

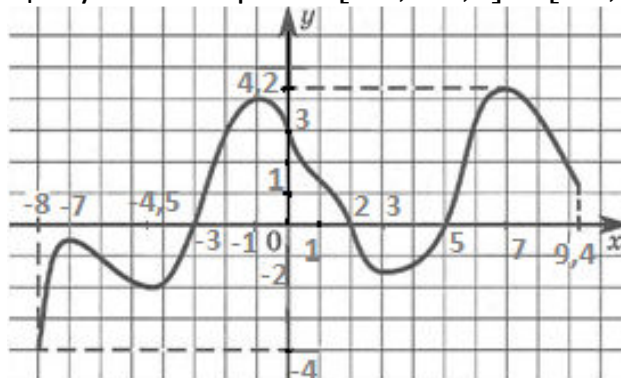
Функцию можно назвать *возрастающей* на промежутке, если, большему из любых двух взятых из него чисел всегда соответствует большее значение функции.

Для нашего примера функция возрастает при $x \in [-8; -7] \cup [-4,5; -1] \cup [3; 7]$.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей*, если для любой пары значений аргументов x_1, x_2 из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Функцию можно назвать *убывающей* на промежутке, если из любых двух взятых из него чисел большему из них всегда соответствует меньшее значение функции.

Для нашего примера функция убывает при $x \in [-7; -4,5] \cup [-1; 3] \cup [7; 9,4]$.



4. *Промежутки знакопостоянства* — промежутки, на которых значения функции имеют постоянный знак (положительный или отрицательный).

Промежуток положительного знака — это множество значений переменной x , у которых соответствующие значения функции больше нуля ($y > 0$).

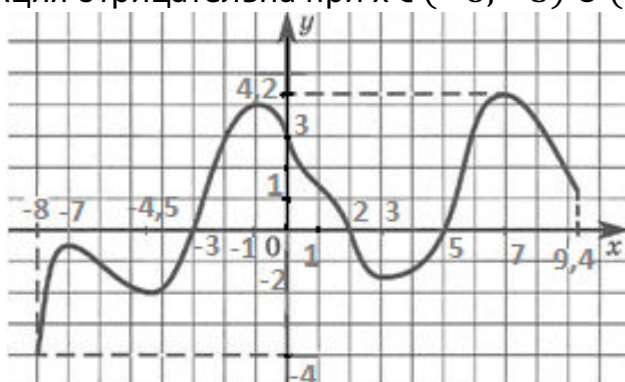
На графике — это части оси абсцисс, у которых соответствующие кусочки графика выше оси OX . Без графика их тоже можно найти, составив и решив неравенство $f(x) > 0$.

Для нашего примера функция положительна при $x \in (-3; 2) \cup (5; 9,4)$.

Промежуток отрицательного знака — это множество тех значений переменной x , у которых соответствующие значения функции меньше нуля ($y < 0$).

На графике — это промежутки оси абсцисс, у которых соответствующие кусочки графика ниже оси OX . Без графика их тоже можно найти, составив и решив неравенство $f(x) < 0$.

Для нашего примера функция отрицательна при $x \in (-8; -3) \cup (2; 5)$.



5. *Нули функции* — это значения переменной x , при которых $y(x) = 0$.

Без графика нули функции тоже можно найти, составив и решив уравнение $f(x) = 0$.

По графику нули определяют как абсциссы точек пересечения графика с осью OX .

Для нашего примера нули функции это точки $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$.

6. *Четность и нечетность функции.*

Функция называется *четной*, если ее график симметричен относительно оси OY и для любого $x \in D(f)$ верно: $-x \in D(f)$ и $f(-x) = f(x)$.

Т. е. функция называется четной, если любым двум противоположным значениям аргумента, из области определения, соответствуют равные значения функции.

На графике четная функция имеет ось симметрии OY .

Функция называется *нечетной*, если ее область определения симметрична относительно нуля и для любого $x \in D(f)$ верно: $-x \in D(f)$ и $f(-x) = -f(x)$.

Т.е. функция называется нечетной, если любым двум противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции.

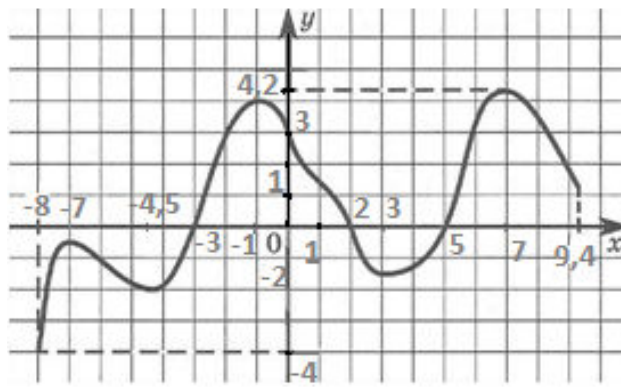
На графике нечетная функция симметрична относительно начала координат.

Произведение или частное двух четных функций — есть функция четная.

Произведение или частное двух нечетных функций — есть функция четная.

Произведение или частное двух функций, одна из которых четная, а другая нечетная — есть функция нечетная.

Функция нашего примера — ни четная, ни нечетная.



7. Периодичность функции.

Функция $y = f(x)$ называется *периодической* с периодом $T > 0$, если для любого $x \in D(f)$ верно: $(x - T) \in D(f)$, $(x + T) \in D(f)$ и $f(x - T) = f(x + T) = f(x)$.

Если $T > 0$ является периодом функции $y = f(x)$, то число $\frac{T}{k}$ - период функции $y = f(kx+b)$.

Если $T_1 > 0$ и $T_2 > 0$ - периоды соответствующих функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, причем $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$, то любая комбинация этих функций $y = a \cdot f(x) + b \cdot g(x)$, $a, b \in \mathbb{Z}$, также периодическая, период которой равен $T = \text{НОК}(T_1, T_2)$.

Функция нашего примера не является периодической.

8. Точки экстремума функции (точки максимума и минимума).

Точка x_0 называется *точкой минимума*, если для всех $x \in D(f)$ в некоторой окрестности этой точки выполняется равенство $f(x) \geq f(x_0)$.

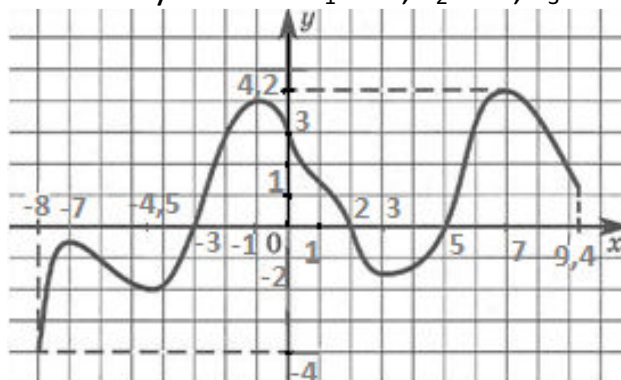
На графике точки минимума - это абсциссы, в которых график выглядит как «ямка».

Для нашего примера точки минимума - это $x_1 = -4,5$, $x_2 = 3$.

Точка x_0 называется *точкой максимума*, если для всех $x \in D(f)$ в некоторой окрестности этой точки выполняется равенство $f(x) \leq f(x_0)$.

На графике точки максимума - это абсциссы, в которых график выглядит как «горка».

Для нашего примера точки максимума - это $x_1 = -7$, $x_2 = -1$, $x_3 = 7$.



9. Наименьшее и наибольшее значение функции.

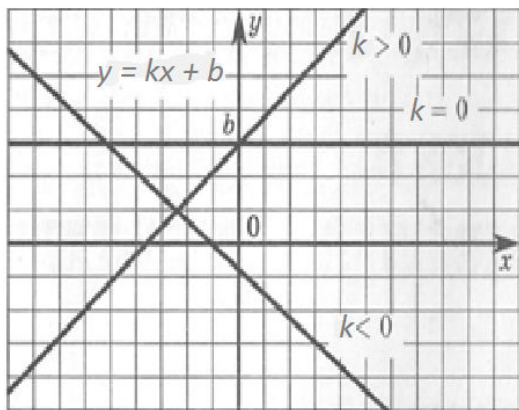
Число $y = t$ называется *наименьшим значением* функции на промежутке $[a, b]$, если для любого значения аргумента $x \in [a, b]$ из этого промежутка верно неравенство $t \leq f(x)$.

Для нашего примера наибольшее значение функции на промежутке $[-8; 9,4]$ равно $y_{н/б} = 4,2$.

Число $y = t$ называется *наибольшим значением* функции на промежутке $[a, b]$, если для любого значения аргумента $x \in [a, b]$ из этого промежутка верно неравенство $t \geq f(x)$. Для нашего примера наименьшее значение функции на промежутке $[-8; 9,4]$ равно $y_{н/м} = -4$.

Свойства элементарных функций

1. Линейная функция $f(x) = kx + b$.

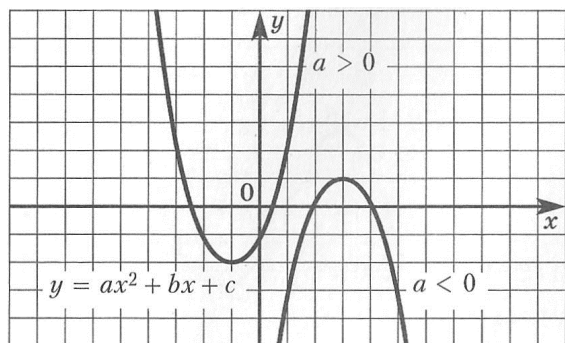


$D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = \mathbb{R}$.

График функции $y = kx + b$ - *прямая линия*. Функция монотонно возрастает при $k > 0$ и убывает при $k < 0$. При $b = 0$ прямая линия проходит через начало координат, при этом функция $y = kx$ - нечетная. Промежутки постоянного знака для функции $y = kx$ зависят от знака параметра k :

$k > 0$, то $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$;

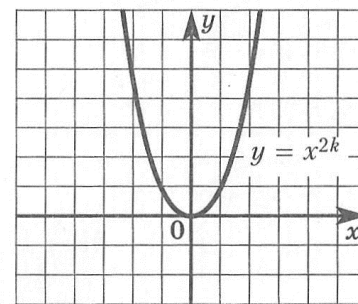
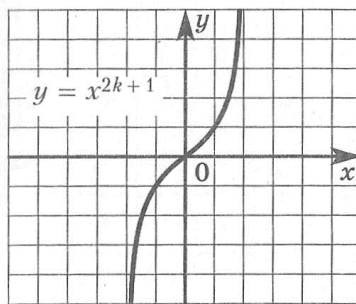
$k < 0$, то $y > 0$ при $x < 0$; $y < 0$ при $x > 0$.



2. Квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Графиком является парабола.

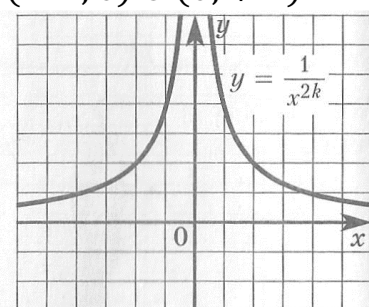
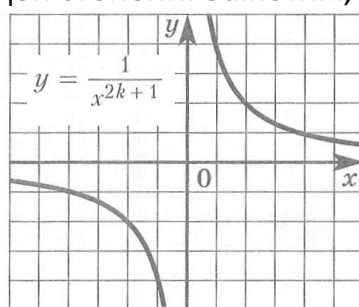
Функция	$y = ax^2$	$y = ax^2 + bx + c$
Область определения	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Вершина параболы	$(0; 0)$	$(x_0; y_0); \quad x_0 = -\frac{b}{2a}; \quad y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$
Нули функции	$x = 0$	при $D = b^2 - 4ac \geq 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ при $D = b^2 - 4ac < 0$ нулей нет
Экстремумы		если $a < 0$, то максимум в вершине если $a > 0$, то минимум в вершине
Область значений	$[0; +\infty)$, $a > 0$ $(-\infty; 0]$, $a < 0$	$[y_0; +\infty)$, $a > 0$ $(-\infty; y_0]$, $a < 0$
Четность	четная	ни четная, ни нечетная

3. Степенная функция $f(x) = x^n$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Графиками ее являются квадратичные или кубические параболы.



Функция	$y = x^{2k+1}$	$y = x^{2k}$
Область определения	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Область значений	$\mathbb{R}$	$[0; +\infty)$
Четность	нечетная	четная
Нули функции	$x = 0$	$x = 0$
Экстремумы	нет	$x = 0$ – точка минимума
Монотонность	возрастает при $x \in \mathbb{R}$	при $x \leq 0$ убывает при $x > 0$ возрастает

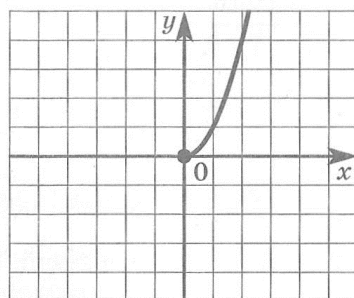
4. $f(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$ - частный случай дробно-рациональной функции. Графиками ее являются гиперболы соответствующей степени. Заметим, что $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.



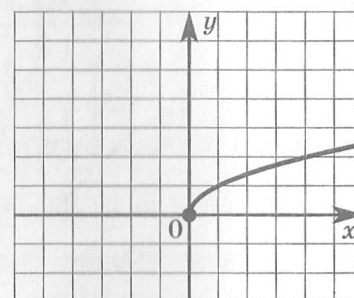
Функция	$y = \frac{1}{x^{2k+1}}$	$y = \frac{1}{x^{2k}}$
Область определения	$\mathbb{R}$ кроме $x = 0$	$\mathbb{R}$ кроме $x = 0$
Область значений	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
Четность	нечетная	четная
Нули функции	нет	нет
Экстремумы	нет	нет
Монотонность	убывает при $x \in D(f)$	при $x < 0$ возрастает при $x > 0$ убывает

5. Степенная функция $f(x) = x^\alpha$, $x \geq 0$, $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$y = x^\alpha, \alpha > 1$$



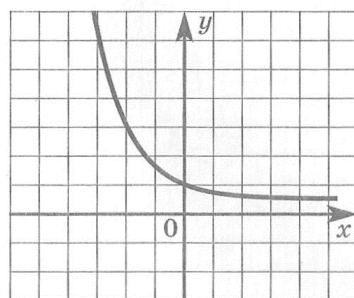
$$y = x^\alpha, 0 < \alpha < 1$$



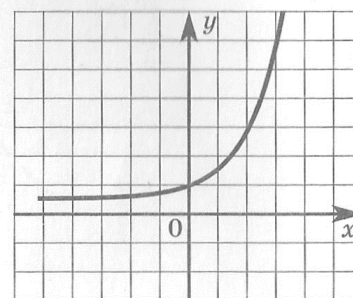
Функция	$y = x^\alpha, \alpha > 1$	$y = x^\alpha, 0 < \alpha < 1$
Область определения	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$
Область значений	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$
Нули функции	$x = 0$	$x = 0$
Экстремумы	нет	нет
Монотонность	возрастает при $x \in D(f)$	возрастает при $x \in D(f)$

6. Показательная функция $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$

$$y = a^x, 0 < a < 1$$

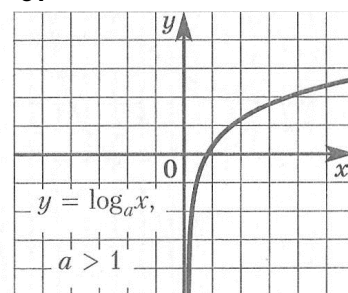
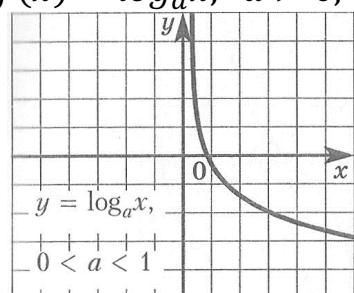


$$y = a^x, a > 1$$



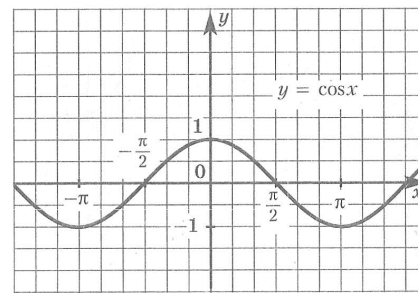
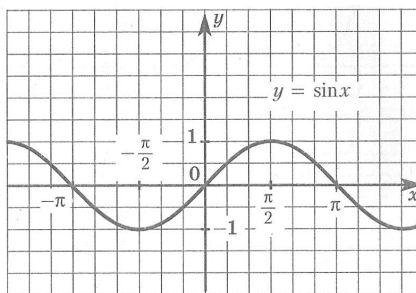
Функция	$y = a^x, 0 < a < 1$	$y = a^x, a > 1$
Область определения	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Область значений	$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
Нули функции	нет	нет
Экстремумы	нет	нет
Монотонность	убывает при $x \in D(f)$	возрастает при $x \in D(f)$

7. Логарифмическая функция $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1, x > 0$.



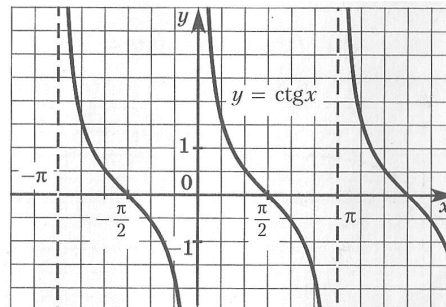
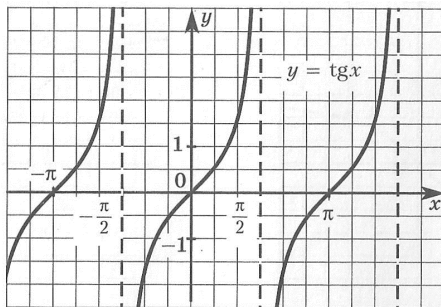
Функция	$y = \log_a x, 0 < a < 1$	$y = \log_a x, a > 1$
Область определения	$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
Область значений	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Нули функции	нет	нет
Экстремумы	нет	нет
Монотонность	убывает при $x \in D(f)$	возрастает при $x \in D(f)$

8. $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ - тригонометрические функции.



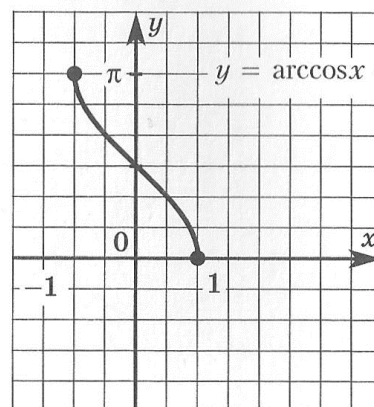
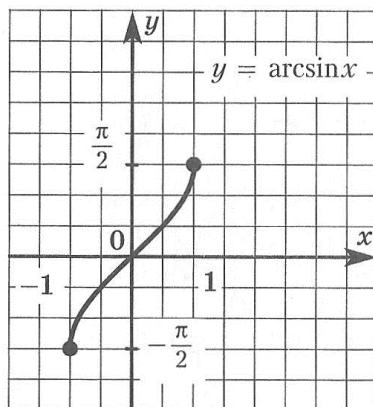
Функция	$y = \sin x$	$y = \cos x$
Область определения	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Область значений	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
Нули функции	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
Четность	нечетная	четная
Периодичность	$T = 2\pi$	$T = 2\pi$
Экстремумы	$x_{\max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ $x_{\min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x_{\max} = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ $x_{\min} = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
Монотонность	возрастает при $x \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$ убывает при $x \in [\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n]$	возрастает при $x \in [-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$ убывает при $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$

9. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ - тригонометрические функции.



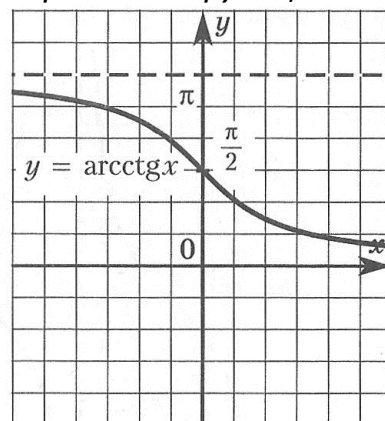
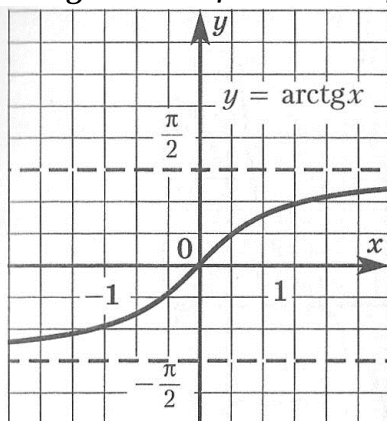
Функция	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
Область определения	$\mathbb{R}$ кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$ кроме $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$
Область значений	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Нули функции	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
Четность	нечетная	нечетная
Периодичность	$T = \pi$	$T = \pi$
Монотонность	возрастает при $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$	убывает при $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$

10. $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \arccos x$ - обратные тригонометрические функции.



Функция	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$
Область определения	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
Область значений	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	$[0; \pi]$
Нули функции	$x = 0$	$x = 1$
Четность	нечетная	ни четная, ни нечетная
Монотонность	возрастает при $x \in [-1; 1]$	убывает при $x \in [-1; 1]$

11. $f(x) = \operatorname{arctg} x, f(x) = \operatorname{arcctg} x$ - обратные тригонометрические функции

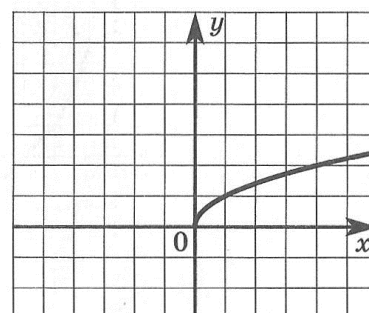
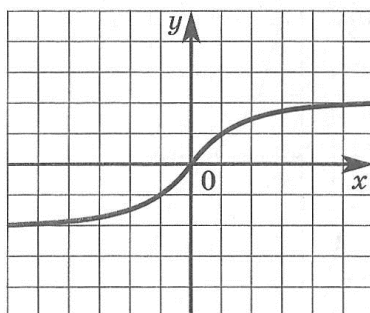


Функция	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$
Область определения	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Область значений	$(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$	$(0; \pi)$
Нули функции	$x = 0$	нет
Четность	нечетная	нечетная
Монотонность	возрастает при $x \in \mathbb{R}$	убывает при $x \in \mathbb{R}$

12. Иррациональные функции вида $f(x) = \sqrt[2n]{x}, f(x) = \sqrt[2n+1]{x}, n \in \mathbb{N}$.

$$y = \sqrt[2n+1]{x}$$

$$y = \sqrt[2n]{x}$$



Функция	$y = \sqrt[n+1]{x}$	$y = \sqrt[n]{x}$
Область определения	$\mathbb{R}$	$[0; +\infty)$
Область значений	$\mathbb{R}$	$[0; +\infty)$
Нули функции	$x = 0$	$x = 0$
Экстремумы	нет	нет
Монотонность	возрастает при $x \in D(f)$	возрастает при $x \in D(f)$

Обратные функции

Обратимой называют **функцию**, принимающую каждое свое значение в *единственной* точке области определения.

Например, $y = x^2$ необратима на $\mathbb{R}$, т.к. уравнение $f(x) = x^2$ имеет два решения:

$x_1 = \sqrt{y}$, $x_2 = -\sqrt{y}$. Однако, $y = x^2$ обратима на множестве $x \geq 0$ или на множестве $x \leq 0$, где выполняется единственность решения.

Функцию $f^{-1}(x)$ называют **обратной** к функции $f(x)$, если функция $f^{-1}(x)$ в каждой точке области значений обратимой функции f принимает такое значение y , что $f(y) = x$.

Например, функцией, обратной к функции $f(x) = kx + b$, является функция

$$f^{-1}(x) = \frac{x - b}{k}, k \neq 0.$$

Свойства обратных функций

1. Область значений функции $f^{-1}(x)$ является областью определения функции $f(x)$.
 $E(f^{-1}(x)) = D(f)$, $E(f) = D(f^{-1}(x))$.
2. Графики функции $f(x)$ и обратной к ней $f^{-1}(x)$ симметричны относительно биссектрисы $y = x$.
3. Если функция $f(x)$ монотонна на промежутке X , то она обратима на этом промежутке.
4. Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) в своей области определения, то и обратная к ней $f^{-1}(x)$ тоже возрастает (убывает).

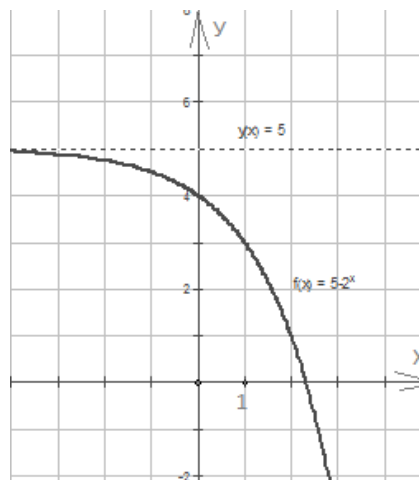
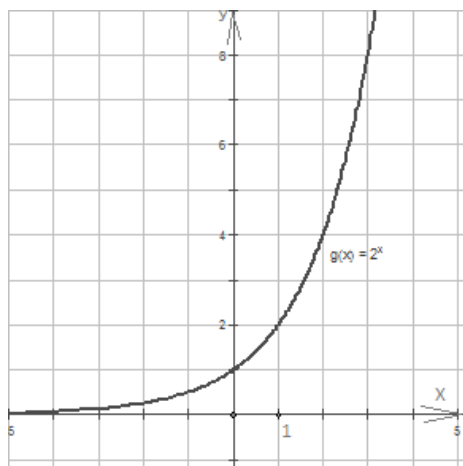
Пример 1. Найти область значений функции $y = 5\sin x - 2$.

Решение: По определению синуса: $-1 \leq \sin x \leq 1$. Умножим данное неравенство на 5:

$-5 \leq 5\sin x \leq 5$, затем вычтем из всех частей неравенства 2, получим: $-7 \leq 5\sin x - 2 \leq 3$.

Ответ $[-7; 3]$.

Пример 2. Указать множество значений функции $y = 5 - 2^x$



Решение: 1-й способ:

Симметрично оси ОХ отобразим график показательной функции $y = 2^x$, чтобы получить график $y = -2^x$. Затем последнюю функцию поднимем на 5 единиц вверх по оси ОУ. Видим, что область значений нашей функции это луч $(-\infty; 5)$.

2-й способ: $2^x > 0$. Умножим данное неравенство на (-1) , получим $-2^x < 0$. Прибавим к обеим частям неравенства 5, получим $5 - 2^x < 5$. Т. е. $E(y) = (-\infty; 5)$.

Ответ $(-\infty; 5)$.

Пример 3. Найти область определения функции $y = \log_5(-x^2 + 5x - 4)$

Решение: По определению логарифмической функции $-x^2 + 5x - 4 > 0$. По теореме, обратной к теореме Виета найдем корни квадратного уравнения: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ и разложим квадратный трехчлен на множители: $-(x - 1)(x - 4) > 0$. Применяя метод интервалов для решения неравенства, получим $x \in (1; 4)$.

Ответ $(1; 4)$.

Пример 4. Найти множество значений функции $y = \frac{6x+7}{3-10x}$.

Решение: Выразим x через y : $6x + 7 = 3y - 10xy$; $x(6 + 10y) = 3y - 7$.

Если $6 + 10y = 0$, то $y = -0,6$. Подставляя это значение y в последнее уравнение, получим $0x = -8,8$. Данное уравнение корней не имеет, значит, функция $y = \frac{6x+7}{3-10x}$ не принимает значения равного $-0,6$.

Если $6 + 10y \neq 0$, то $x = \frac{3y-7}{6+10y}$. Область определения последнего уравнения – любое действительное y , кроме $y = -0,6$. Получаем, что $E(y) = (-\infty; -0,6) \cup (-0,6; +\infty)$.

Ответ $(-\infty; -0,6) \cup (-0,6; +\infty)$.

Пример 5. Найти множество значений функции $y = \sqrt{x+1} - 3$.

Решение: Учитывая, что $\sqrt{x+1} \geq 0$, по свойствам неравенств получим $\sqrt{x+1} - 3 \geq -3$. Т.е. $E(y) = [-3; +\infty)$.

Ответ $[-3; +\infty)$.

Пример 6. Найти множество значений функции $y = \frac{1}{x^2+3}$.

Решение: Так как $E(x^2) = [0; +\infty)$, то $E(x^2+3) = [3; +\infty)$. Так как обратная пропорциональность – непрерывная и убывающая функция на этом промежутке, большему значению аргумента будет соответствовать меньшее значение функции. При стремлении аргумента этой функции к $+\infty$ значение самой функции стремится к нулю: $E(1/(x^2+3)) = (0; 1/3]$.

Ответ $(0; 1/3]$.

Пример 7. Найти множество значений функции $y = \sqrt{x^2+3}$.

Решение: $E(x^2) = [0; +\infty)$, $E(x^2+3) = [3; +\infty)$. Так как функция $y = \sqrt{x^2+3}$ непрерывна и возрастает на этом промежутке, то $E(\sqrt{x^2+3}) = [\sqrt{3}; +\infty)$.

Ответ $[\sqrt{3}; +\infty)$.

Пример 8. Найти наименьшее значение функции $y = 3 - \frac{4}{1+\sqrt{x-1}}$.

Решение: Разность принимает наименьшее значение при наибольшем значении вычитаемого. Дробь принимает наибольшее значение при наименьшем значении знаменателя.

Получаем, что данная функция принимает наименьшее значение при наименьшем значении выражения $1 + \sqrt{x - 1}$, находящегося в знаменателе дроби.

$E(\sqrt{x - 1}) = [0; +\infty)$, $E(1 + \sqrt{x - 1}) = [1; +\infty)$.

Итак, наименьшее значение знаменателя равно 1. Тогда функция принимает значение, равное -1 .

Ответ -1 .