

ШПАРГАЛКИ ПО МАТЕМАТИКЕ.

Признаки делимости.

На 2: Если последняя цифра числа делится на 2, то число делится на 2.

На 5: Если последняя цифра числа 0 или 5, то число делится на 5.

На 10: Если последняя цифра числа 0, то число делится на 10.

На 3: Если сумма цифр числа делится на 3, то число делится на 3.

На 9: Если сумма цифр числа делится на 9, то число делится на 9.

На 4: Если последние две цифры составляют число, кратное 4 (или два нуля), то число делится на 4.

Примеры. $23.3\underline{12} : 4$, $7.3\underline{08} : 4$, $275.6\underline{00} : 4$.

На 6: Если число кратно 3 и четное, то оно делится на 6.

Примеры. $714 : 6$, $2.526 : 6$.

На 15: Если число кратно 3 и 5, то оно делится на 15.

Примеры. $8.715 : 15$, $2.520 : 15$.

На 8: Если последние три цифры составляют число, кратное 8 (или три нуля), то число делится на 8.

Примеры. $7\underline{848} : 8$, $92\underline{024} : 8$, $3\underline{008} : 8$, $3\underline{640} : 8$, $75\underline{000} : 8$.

На 25: Если последние две цифры составляют число, кратное 25 (или два нуля), то число делится на 25.

Примеры. $3\underline{25} : 25$, $7.3\underline{50} : 25$, $275.6\underline{00} : 25$.

На 11: Если сумма цифр числа, занимаемых нечетными местами и сумма цифр, занимаемых четными местами, равны или отличаются на число, кратное 11, то число делится на 11.

Примеры. 746.526 ($4+5+6=15$, $7+6+2=15$), $746.526 : 11$

281.446 ($8+4+6=18$, $2+1+4=7$, $18-7=11:11$), $281.446 : 11$

$28.193.209$ ($8+9+2+9=28$, $2+1+3+0=6$, $28-6=22:11$), $28.193.209:11$

Формулы сокращенного умножения

	Формула	Словесная формулировка
1.	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	Квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа и второго и плюс квадрат второго числа.
2.	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого числа и второго и плюс квадрат второго числа.
3.	$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	Квадрат суммы трёх чисел равен сумме квадратов этих чисел плюс всевозможные удвоенные произведения.
4.	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	Разность квадратов двух чисел равна произведению суммы этих чисел и их разности.
5.	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	Куб суммы двух чисел равен кубу первого числа плюс утроенное произведение квадрата первого и второго числа плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго и плюс куб второго числа.
6.	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	Куб разности двух чисел равен кубу первого числа минус утроенное произведение квадрата первого и второго числа плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго и минус куб второго числа.
7.	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	Сумма кубов двух чисел равна произведению суммы этих чисел на неполный квадрат и их разности.
8.	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	Разность кубов двух чисел равна произведению разности этих чисел на неполный квадрат их суммы.

Формулы зависимости между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла.

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$\operatorname{tga} = \frac{\sin a}{\cos a}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

$$\operatorname{tga} \cdot \operatorname{ctga} = 1 \quad \operatorname{ctga} = \frac{\cos a}{\sin a}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

Формулы двойного угла.

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a ; \quad 1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a ; \quad 1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tga}}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

Формулы сложения.

$$\sin(a + \beta) = \sin a \cos \beta + \cos a \sin \beta$$

$$\cos(a + \beta) = \cos a \cos \beta - \sin a \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(a + \beta) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

Формулы половинного угла.

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}; \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Сумма и разность синусов.

Сумма и разность косинусов.

$$\sin a + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

Формулы произведения.

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha};$$

Тригонометрические уравнения

$\cos x = a$; где $a \in [-1; 1]$

$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

Частные случаи:

$\cos x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbf{Z}$

$\cos x = 1; \quad x = 2\pi n; n \in \mathbf{Z}$

$\cos x = -1; \quad x = \pi + 2\pi n; n \in \mathbf{Z}$

$\cos(\arccos a) = a; \quad a \in [-1; 1]$

$\arccos(\cos \alpha) = \alpha; \quad \alpha \in [0; \pi]$

$\sin x = a$; где $a \in [-1; 1]$

$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbf{Z}$

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$

Частные случаи:

$$\sin x = 0; \quad x = \pi n; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 1; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(\arcsin a) = a; \quad a \in [-1; 1]$$

$$\arcsin(\sin \alpha) = \alpha; \quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

tg x = a

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a; \quad a \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha; \quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Метод дополнительного угла.

$$a \sin x + b \cos x = c$$

эквивалентно уравнению

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{где } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

Логарифмы.

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b$$

$$b > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

Свойства логарифмов:

$$a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad r \in \mathbf{R}$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^r = r \log_a b$$

$$\log_{a^r} b = \frac{1}{r} \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Таблица первообразных

Функция.	Первообразная.
$x^p, \quad p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\frac{1}{x}, \quad x > 0$	$\ln x + C$
ex	$ex + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$

$\cos x$	$\sin x + C$
$(kx + b)^p, p \neq -1, k \neq 0$	$\frac{(kx + b)^{p+1}}{k(p+1)} + C$
$\frac{1}{kx + b}, k \neq 0$	$\frac{1}{k} \ln(kx + b) + C$
$e^{kx+b}, k \neq 0$	$\frac{1}{k} e^{kx+b} + C$
$\sin(kx + b), k \neq 0$	$-\frac{1}{k} \cos(kx + b) + C$
$\cos(kx+b), k \neq 0$	$\frac{1}{k} \sin(kx + b) + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$

Геометрический смысл производной.

Уравнение касательной.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Геометрический смысл производной

$$\operatorname{tg} \alpha = k = f'(x_0)$$

Физический смысл производной.

$$v(t) = s'(t)$$

$$a(t) = v'(t)$$

Область определения функций.

D(y): $x \in \mathbf{R}$	D(y): $x \in \mathbf{R}$, исключая одно или несколько значений.	Область определения задаётся неравенство.
$y = 2x^2 + 6x - \sqrt{2}$ Квадратичная функция	$y = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$ Функция обратной пропорциональности	$y = \sqrt{x}; \quad x \geq 0$ Функция квадратного корня
$y = -2x + 3$ Линейная функция	$y = \frac{1}{x + 2}, \quad x \neq -2$	$y = \sqrt[4]{x - 6}; \quad x \geq 6$
$y = x^6 + 2x$	$y = \frac{1}{x^2 - 9}, \quad x \neq \pm 3$	$y = x^{\frac{1}{3}}; \quad x \geq 0$ Степенная функция, показатель – положительное нецелое число
$y = x - 3 $	$y = x^{-2}, \quad x \neq 0$ Степенная функция, показатель – отрицательное целое число	$y = (x - 2)^{\frac{2}{5}}; \quad x - 2 \geq 0$
$y = \frac{6x}{9}$	$y = x^{-5}, \quad x \neq 0$	$y = (x^2 - 9)^{\frac{1}{5}}; \quad x^2 - 9 \geq 0$
$y = \frac{2x}{x^2 + 7}$	$y = (x + 3)^{-4}, \quad x \neq -3$	$y = x^{-\frac{1}{3}}; \quad x > 0$ Степенная функция, показатель – отрицательное нецелое число
$y = \sqrt[3]{x}$	$y = (x^2 - 9)^{-3}, \quad x \neq \pm 3$	$y = (x + 5)^{-\frac{2}{9}}; \quad x + 5 > 0$
$y = \sqrt[5]{x + 5}$	$y = (x - 1)^{-3} + (x - 3)^{-5} + (x^2 - 4)^{-2}$	$y = (x^2 - 16)^{-\frac{2}{7}}; \quad x^2 - 16 > 0$
$y = \sqrt[15]{-x^2 + 9}$	$x \neq 1, x \neq 3, x \neq \pm 2$	$y = (x^2 + 6x + 9)^{-\frac{3}{8}}, \quad (x + 3)^2 > 0$
Показательная функция $y = a^x$		Логарифмическая функция $y = \log_a x; \quad x > 0$
Тригонометрические функции		
$y = \cos x,$ $y = \sin x$	$y = \operatorname{tg} x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ $y = \operatorname{ctg} x, \quad x \neq \pi n$	$y = \lg x; \quad x > 0$ $y = \ln x; \quad x > 0$

